سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

۱

ابتدا کسر $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\Rightarrow A^2=\frac{\sqrt{5}+\cancel{2}+\sqrt{5}-\cancel{2}+2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1}=\frac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1}=2\Rightarrow A^2=2\Rightarrow A=\sqrt{2}$$

از طرفی $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ برابر است با:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با :

$$\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a}-1}+\frac{1}{\sqrt[6]{a}+1}=1\rightarrow\frac{2\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}=1\rightarrow\sqrt[3]{a}-1=2\sqrt[6]{a}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a-1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}-2\sqrt[6]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-1)\cancel{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}}{\cancel{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}}-2\sqrt[6]{a}=\sqrt[3]{a}-1-2\sqrt[6]{a}=2\sqrt[6]{a}-2\sqrt[6]{a}=0$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

در ابتدا می‌دانیم:

$$\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{8}+2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{8}+2)}{\sqrt{8}+2}=\sqrt{2}$$

از طرفی داریم:

$$A=\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}})\Rightarrow A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$A=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1=-2\Rightarrow A=-2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

تمام عبارت‌ها را به یک طرف تساوی انتقال می‌دهیم.

$$4a^3-3a^2+3a-2=0\Rightarrow 3a^3+(a-1)^3-1=0$$

$$\Rightarrow(a-1)^3=1-3a^3\Rightarrow a-1=\sqrt[3]{1-3a^3}\Rightarrow a-\sqrt[3]{1-3a^3}=1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

عدد ۴ دارای دو ریشه مرتبه چهارم به صورت $-\sqrt[4]{4}$ و $\sqrt[4]{4}$ است.

$$\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{4}=a\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b=2a^{-\frac{4}{9}}=2\times(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{9}}\Rightarrow b=2\times2^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow b=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{4b}=\sqrt[3]{8}=2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶ طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$A=\left((x+\frac{۱}{x})^{۲}-۱\right)-۱$$

$$A=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲-۲\Rightarrow A=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$$

با توجه به اینکه: $x^{۲}=۲-\sqrt{۳}$

$$A=۲-\sqrt{۳}+\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}$$

$$A=\frac{۴+۳-۴\sqrt{۳}+۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۸-۴\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۳})}{۲-\sqrt{۳}}=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

$$A=\frac{\sqrt{۳}(۷+۴\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۲)}-\sqrt{۳}-۱$$

$$A=\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۳}-۱=\frac{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۳}-۱$$

$$A=۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱=۱\Rightarrow A=۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸ ابتدا فرض را ساده می‌کنیم:

$$۴^{۲+\sqrt{۲}}=۴\times a^{۲+\sqrt{۲}}\Rightarrow ۴^{۲+\sqrt{۲}-۱}=a^{۲+\sqrt{۲}}\Rightarrow ۴^{۱+\sqrt{۲}}=a^{۲+\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow ۴^{۱+\sqrt{۲}}=a^{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})}\Rightarrow a^{\sqrt{۲}}=۴$$

پس، $a^{-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۴}$، دقت کنید:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{a^{۳}+b^{۳}+۲}{(۱+a^{۳})(۱+b^{۳})}=۱\Rightarrow a^{۳}+b^{۳}+۲=a^{۳}+b^{۳}+(ab)^{۳}+۱\Rightarrow(ab)^{۳}=۱\Rightarrow ab=۱$$

از طرفی:

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)\Rightarrow a^{۳}+b^{۳}=۶۴-۳(۴)=۶۴-۱۲=۵۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰ با توجه به آن‌که $۰<x<۱$، پس x دارای ۲ ریشه دوم است که قرینه یکدیگر هستند و یک ریشه سوم دارد که با x هم‌علامت است. از طرفی، $\sqrt{x}<\sqrt[۳]{x}$، پس:

$$a=\sqrt[۳]{x}$$
$$b=\sqrt{x}\quad\Rightarrow ۴ab+c=۰$$
$$c=-\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt[۳]{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}=۰\Rightarrow\sqrt{x}(۴\sqrt[۳]{x}-۱)=۰$$

$$\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow x=۲^{-۶}\Rightarrow x^{-\frac{۱}{۶}}=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}(A+B)=\sqrt{۲}A+\sqrt{۲}B=\sqrt{۱۶-۶\sqrt{۷}}+\sqrt{۱۶+۶\sqrt{۷}}$$

$$\Rightarrow (A+B)\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(۳-\sqrt{۷})^۲}+\sqrt{(۳+\sqrt{۷})^۲}=۳-\sqrt{۷}+۳+\sqrt{۷}=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

ابتدا A را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt[۴]{۲^۳\times ۳}\times\sqrt[۳]{۳\times ۲^{\frac{۱}{۴}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}}\Rightarrow A=۲^{\frac{۳}{۴}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}\times ۳^{\frac{۵}{۱۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۱۲}}$$

$$A=۲^{\frac{۱۰}{۱۲}}\times ۳^{\frac{۸}{۱۲}}\Rightarrow A=۲^{\frac{۵}{۶}}\times ۳^{\frac{۴}{۶}}$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=۲^{-\frac{۵}{۶}}\times ۳^{-\frac{۴}{۶}}\Rightarrow ۶A^{-۱}=۲^{\frac{۱}{۶}}\times ۳^{\frac{۲}{۶}}\Rightarrow ۶A^{-۱}=\sqrt[۶]{۲\times ۹}=\sqrt[۶]{۱۸}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

$$A=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۸+۳\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{(۳+\sqrt{۷})^۲}\Rightarrow A=\sqrt[۴]{\frac{(۱۶+۶\sqrt{۷})}{۸+۳\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{\frac{۲(۸+۳\sqrt{۷})}{۸+۳\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{۲}$$

پس، $\sqrt[۴]{۸}A$ یک عدد صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{۸}A=\sqrt[۴]{۸}\times\sqrt[۴]{۲}=\sqrt[۴]{۱۶}=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

اگر $\sqrt{x+۱۰}+\sqrt{x}=k$ باشد، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+۱۰}-\sqrt{x}=۱\\ \sqrt{x+۱۰}+\sqrt{x}=k\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضرب}}(x+۱۰)-x=k\Rightarrow k=۱۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

می‌دانیم: $۲^a=۲۵=۵^۲\Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}}=۵$

$$۵^b=۸\Rightarrow (۲^{\frac{a}{۲}})^b=۲^۳\Rightarrow ۲^{\frac{ab}{۲}}=۲^۳\Rightarrow \frac{ab}{۲}=۳\Rightarrow ab=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

می‌دانیم:

$$\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}=\sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲}=\left|\sqrt{۵}-۳\right|=۳-\sqrt{۵}$$

$$\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}=\sqrt{(\sqrt{۵}-۱)^۲}=\left|\sqrt{۵}-۱\right|=\sqrt{۵}-۱$$

خواهیم داشت:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}-۳}+\frac{۱}{\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}-\sqrt{۵}}=\frac{۱}{۳-\sqrt{۵}-۳}+\frac{۱}{\sqrt{۵}-۱-\sqrt{۵}}=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}-۱$$

بنابراین:

$$[A]=\left[-\frac{۱}{\sqrt{۵}}-۱\right]=\left[-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right]-۱=-۱-۱=-۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

$$A=((\sqrt{۲})^{۳}-۱)(۳+\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}-۱)(۲+۱+\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}-۱)(۳+\sqrt{۲})^{۲}$$

$$(۲\sqrt{۲}+۳)^{\frac{۱}{۴}}A^{\frac{۱}{۲}}=(\sqrt{۲}+۱)^{\frac{۲}{۴}}A^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)A}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)(۳+\sqrt{۲})^{۲}}=\sqrt{(۲-۱)(۳+\sqrt{۲})^{۲}}=۳+\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸

نکته: اگر $a>۰$، آنگاه: $(\sqrt{a})^{۲}=a$

ابتدا دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{a+b})^{۲}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲}\Rightarrow a+b=a+b+۲\sqrt{ab}\Rightarrow ۲\sqrt{ab}=۰\Rightarrow ab=۰\Rightarrow a=۰ \text{ یا } b=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹

نکته: اگر $a>۱$، ریشهٔ سوم آن یعنی $\sqrt[۳]{a}$ کوچک‌تر از a و اگر $۰<a<۱$ ریشهٔ سوم آن یعنی $\sqrt[۳]{a}$ بزرگ‌تر از a است.

برای ردِ حکم «ریشهٔ سوم هر عدد حقیقی از خودش کوچک‌تر است» کافی است عددی بین صفر و یک مثال بزنیم که در بین گزینـه‌ها تنهـا عددی که بین صفر و یک است، عدد $\sqrt{۲}-۱$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

نکته: $a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})\Rightarrow a-b=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}})$

معکوس عدد $۱+\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۵}$، یعنی $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۵}+۱}$، برابر است با:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۵}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}-۱}{\sqrt[۳]{۵}-۱}=\frac{\sqrt[۳]{۵}-۱}{۵-۱}=\frac{۱}{۴}(\sqrt[۳]{۵}-۱)$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱

نکته: $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}\quad,\quad (a^{m})^{n}=a^{mn}\quad,\quad a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}\quad,\quad a^{-n}=\frac{۱}{a^{n}}$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt[۳]{۲^{x+۵}}=\sqrt[۳]{۴^{۲x-۱}}\Rightarrow ۲^{\frac{x+۵}{۳}}=۴^{\frac{۲x-۱}{۳}}\Rightarrow ۲^{\frac{x+۵}{۳}}=(۲^{۲})^{\frac{۲x-۱}{۳}}$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{x+۵}{۳}}=۲^{\frac{۴x-۲}{۳}}\Rightarrow \frac{x+۵}{۳}=\frac{۴x-۲}{۳}\Rightarrow x+۵=۴x-۲\Rightarrow x=\frac{۷}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

نکته: $(a^{m})^{n}=a^{mn}\quad,\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\sqrt[n]{۳}=۸۱^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}\Rightarrow \sqrt[n]{۳}=۸۱^{\frac{۱}{۲۴}}\Rightarrow \sqrt[n]{۳}=(۳^{۴})^{\frac{۱}{۲۴}}\Rightarrow \sqrt[n]{۳}=۳^{\frac{۴}{۲۴}}\Rightarrow \sqrt[n]{۳}=۳^{\frac{۱}{۶}}\Rightarrow \sqrt[n]{۳}=\sqrt[۶]{۳}\Rightarrow n=۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

$$\text{نکته}: (a^m)^n = a^{mn} \quad , \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{۸^{۲۰}+۴^{۲۰}}{۸^{۱۰}+۲^{۱۰}} = \frac{(۲^۳)^{۲۰}+(۲^۲)^{۲۰}}{(۲^۳)^{۱۰}+۲^{۱۰}} = \frac{۲^{۶۰}+۲^{۴۰}}{۲^{۳۰}+۲^{۱۰}} = \frac{۲^{۴۰}(۲^{۲۰}+۱)}{۲^{۱۰}(۲^{۲۰}+۱)} = \frac{۲^{۴۰}}{۲^{۱۰}} = ۲^{۴۰-۱۰} = ۲^{۳۰}$$

بنابراین ریشهٔ ششم این عدد برابر است با:

$$\pm\sqrt[۶]{۲^{۳۰}} = \pm ۲^{\frac{۳۰}{۶}} = \pm ۲^۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

نکته: اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آنگاه به ازای $۰ < a < ۱$ و $a < -۱$ رابطهٔ $\sqrt[n]{a} > a$ برقرار است.

با توجه به نکتهٔ بالا، گزینهٔ ۴ پاسخ است. برای سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

$$\text{گزینهٔ ۱}: a = ۸ > ۰ \; ; \; \underbrace{\sqrt[۳]{۸}}_{۲} < ۸ \quad , \quad \text{گزینهٔ ۲}: a = -\frac{۱}{۸} < ۰ \; ; \; \underbrace{\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}}_{-\frac{۱}{۲}} < -\frac{۱}{۸} \quad , \quad \text{گزینهٔ ۳}: a = -\frac{۱}{۸} < ۱ \; ; \; \underbrace{\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}}_{-\frac{۱}{۲}} < -\frac{۱}{۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

$$\text{نکته}: (a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$$

$$\text{نکته}: (a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$$

راه‌حل اول:

با اضافه و کم کردن جملهٔ $۱۶x^۲$ داریم:

$$A = x^۴ + ۶۴ = x^۴ + ۸^۲ + ۱۶x^۲ - ۱۶x^۲ = (x^۲+۸)^۲ - (۴x)^۲ = (x^۲+۸-۴x)(x^۲+۸+۴x)$$

راه‌حل دوم:

با استفاده از نکات بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱}: (x^۲+۸)^۲ = x^۴ + ۶۴ + ۱۶x^۲ \qquad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: (x^۲+۸)(x^۲-۸) = x^۴ - ۶۴ \qquad \times$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: (x^۲-۴x+۸)(x^۲+۴x+۸) = ((x^۲+۸)-۴x)((x^۲+۸)+۴x) = (x^۲+۸)^۲ - (۴x)^۲$$

$$= x^۴ + ۱۶x^۲ + ۶۴ - ۱۶x^۲ = x^۴ + ۶۴ \qquad \checkmark$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

$$\text{نکته}: a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$$

ابتدا دسته‌بندی و سپس فاکتورگیری می‌کنیم:

$$(a^۳ - a^۲b) + (۴b^۳ - ۴ab^۲) = a^۲(a-b) + ۴b^۲(b-a) = (a-b)(a^۲ - ۴b^۲) = (a-b)(a+۲b)(a-۲b)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

نکته (اتحاد مزدوج) : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

نکته : $\sqrt{x^2}=|x|$

برای آنکه مخرج کسر را گویا کنیم، ابتدا عبارت زیر رادیکال را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{5-\sqrt5}\times\frac{5+\sqrt5}{5+\sqrt5}}=\sqrt{\frac{(5+\sqrt5)^2}{25-5}}=\sqrt{\frac{(5+\sqrt5)^2}{20}}=\frac{|5+\sqrt5|}{\sqrt{20}}$$

$$\xlongequal{5+\sqrt5>0}\frac{5+\sqrt5}{2\sqrt5}\times\frac{\sqrt5}{\sqrt5}=\frac{5\sqrt5+5}{2\times5}=\frac{5(\sqrt5+1)}{10}=\frac{\sqrt5+1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

نکته : $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

نکته : $=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

همهٔ رادیکال‌ها را به‌صورت توانی می‌نویسیم:

$$A=\sqrt[6]{18}\times\sqrt[4]{12}\times\sqrt[3]{6\sqrt[4]{3}}=18^{\frac16}\times12^{\frac14}\times6^{\frac13}\times3^{\frac1{12}}$$

$$=(2^{\frac16}\times3^{\frac26})\times(2^{\frac24}\times3^{\frac14})\times(2^{\frac13}\times3^{\frac13})\times(3^{\frac1{12}})$$

$$=2^{(\frac16+\frac12+\frac13)}\times3^{(\frac13+\frac14+\frac13+\frac1{12})}=2^1\times3^1=6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹

نکته : $(\sqrt x\pm\sqrt y)^2=x+y\pm2\sqrt{xy}\ \ (x\,,\,y\ge0)$, $\sqrt{x^2}=|x|$

نکته : $(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x\pm y$

ابتدا α را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{9-4\sqrt2}=\sqrt{(2\sqrt2)^2+(1)^2-2(2\sqrt2)}=\sqrt{(2\sqrt2-1)^2}=|2\sqrt2-1|=2\sqrt2-1$$

$$\alpha=\sqrt{3+2\sqrt2-(2\sqrt2-1)}=\sqrt4=2$$

حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ را پس از گویا کردن مخرج آن به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}\times\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{(\sqrt[3]{3})^3-(1)^3}=\sqrt[3]{3}-1$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+1=\sqrt[3]{3}-1+1=\sqrt[3]{3}\Rightarrow\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

نکته: $(a\pm b)(a^۲ \mp ab + b^۲) = a^۳ \pm b^۳$

نکته: اگر $a > ۰$، آنگاه: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

در مخرج کسر از $\sqrt[۳]{۳}$ فاکتور می‌گیریم و کسر را گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۳}(\sqrt[۳]{۳}+۱+\sqrt[۳]{۹})} = \frac{۲}{\underbrace{\sqrt[۳]{۹}}_{a^۲}+\underbrace{\sqrt[۳]{۳}}_{ab}+\underbrace{۱}_{b^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۳}-۱}{\underbrace{\sqrt[۳]{۳}}_{a}-\underbrace{۱}_{b}} = \frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{\underbrace{۳}_{a^۳}-\underbrace{۱}_{b^۳}} = \frac{۲(\sqrt[۳]{۳}-۱)}{۲} = \sqrt[۳]{۳}-۱$$

اکنون داریم:

$$A = \sqrt[۳]{۳}-۱ \Rightarrow (A+۱)^۳ = (\sqrt[۳]{۳}-۱+۱)^۳ = (\sqrt[۳]{۳})^۳ = ۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱

نکته: $(a\pm b)(a^۲ \mp ab + b^۲) = a^۳ \pm b^۳$

نکته: اگر $a > ۰$، آنگاه:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

نکته: $(a-b)(a+b) = a^۲ - b^۲$

ابتدا داریم:

$$۲۴\sqrt{۳} = ۸\times ۳\sqrt{۳} = (۲\sqrt{۳})^۳$$

$$(\sqrt{۳}-۱)^۲ = ۳-۲\sqrt{۳}+۱ = ۴-۲\sqrt{۳} = ۲(۲-\sqrt{۳})$$

بنابراین:

$$A = \frac{(۲\sqrt{۳})^۳-۱}{۱۳+۲\sqrt{۳}} - \frac{۴}{۲(۲-\sqrt{۳})}$$

اکنون صورت کسر اول را با اتحاد مجموع و تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر) تجزیه می‌کنیم و مخرج کسر دوم را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{(۲\sqrt{۳}-۱)(۱۲+۲\sqrt{۳}+۱)}{۱۳+۲\sqrt{۳}} - \frac{۲}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}-۱-\frac{۲(۲+\sqrt{۳})}{۴-۳} = ۲\sqrt{۳}-۱-۲(۲+\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳}-۱-۴-۲\sqrt{۳} = -۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲

نکته : $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

نکته : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ابتدا کسر $\frac{1}{x-1}$ را با جای‌گذاری مقدار x گویا می‌کنیم:

$$x = \sqrt{5} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5} - 2$$

اکنون با جای‌گذاری x، مقدار A را به‌دست می‌آوریم:

$$A = \sqrt{x - \frac{1}{x-1}} = \sqrt{\sqrt{5} + 3 - (\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{5}$$

بنابراین:

$$x^3 - 32A = (\sqrt{5}+3)^3 - 32\sqrt{5} = (\sqrt{5})^3 + 3(\sqrt{5})^2(3) + 3(\sqrt{5})(3)^2 + 3^3 - 32\sqrt{5}$$
$$= 5\sqrt{5} + 45 + 27\sqrt{5} + 27 - 32\sqrt{5} = 45 + 27 = 72$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

نکته: اگر $x-a$ یکی از عامل‌های چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، آنگاه $f(a) = 0$ است.

چون $f(x)$ عامل $x-2$ دارد؛ یعنی $f(2) = 0$، پس:

$$f(2) = 8a - 44 + 16a + 2 - 6 = 0 \Rightarrow 24a = 48 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = (x-2)(2x^2 - 7x + 3)$$

حال $2x^2 - 7x + 3$ را تجزیه می‌کنیم.

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x-3)(x - \frac{1}{2}) = (x-3)(2x-1)$$

پس:

$$f(x) = (x-2)(x-3)(2x-1)$$
$$\Rightarrow f(2x+1) = (2x+1-2)(2x+1-3)(4x+2-1) = (2x-1)(2x-2)(4x+1) = 2(2x-1)(x-1)(4x+1)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴ نکته:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

با استفاده از اتحادهای نکته داریم:

$$A=\frac{x^6-64}{(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)}=\frac{(x^3-8)(x^3+8)}{(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)} \Rightarrow A=(x-2)(x+2)=x^2-4$$

$$x=\sqrt{3}+1 \Rightarrow A=(\sqrt{3}+1)^2-4 \Rightarrow A=3+2\sqrt{3}+1-4 \Rightarrow A=2\sqrt{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵ نکته: اگر $a>0$ و k,n,m اعداد طبیعی باشند، آنگاه: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$

نکته: اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ تعریف‌شده باشند، آنگاه: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

راه‌حل اول:

ابتدا فرجهٔ رادیکال اول را به ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{\sqrt{6}+2}\times\sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}=\sqrt[6]{(\sqrt{6}+2)^2}\times\sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}=\sqrt[6]{6+4\sqrt{6}+4}\times\sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}=\sqrt[6]{10+4\sqrt{6}}\times\sqrt[6]{10-4\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt[6]{(10+4\sqrt{6})(10-4\sqrt{6})}=\sqrt[6]{100-96}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

راه‌حل دوم:

عبارت زیر رادیکال دوم را به‌صورت اتحاد می‌نویسیم و داریم:

$$10-4\sqrt{6}=(\sqrt{6})^2-2(2)(\sqrt{6})+(2)^2=(\sqrt{6}-2)^2$$

$$(\sqrt[3]{\sqrt{6}+2})(\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^2})=\sqrt[3]{\sqrt{6}+2}\times\sqrt[3]{\sqrt{6}-2}=\sqrt[3]{6-4}=\sqrt[3]{2}$$

(دقت کنید: $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^2}=\sqrt[3]{|\underbrace{\sqrt{6}-2}_{>0}|}=\sqrt[3]{\sqrt{6}-2}$)

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶ نکته: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

ابتدا عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم و سپس حاصل را به‌ازای $x=\sqrt[3]{7}$ به‌دست می‌آوریم:

$$(x-1)(x+\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$$

$$=[(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)][(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)]$$

$$=((\sqrt{x})^3-1)((\sqrt{x})^3+1)=((\sqrt{x})^3)^2-1$$

$$=x^3-1 \xrightarrow{x=\sqrt[3]{7}} A=(\sqrt[3]{7})^3-1=7-1=6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

نکته: $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

ابتدا مقدار x^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\right)^3 = 5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\times\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\,\underbrace{\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}\right)}_{x}$$

$$=10+3\sqrt[3]{25-4\times 6}\times x = 10+3\times 1\times x = 10+3x \Rightarrow x^3=10+3x \Rightarrow x^3-3x=10$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر با ۱۰ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

نکته: $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\cdot b}\ ,a>0$

نکته: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}, n\in\mathbb{N}$

طرفین عبارت داده‌شده را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^a\times\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)+1 = 2^a\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(2-\sqrt{3})}+1 = 2^a\times\sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}}+1 = 2^a\times 2\sqrt{3}\ (*)$$

عبارت زیر رادیکال سمت چپ مربع کامل است، زیرا:

$$4-2\sqrt{3} = \sqrt{3}^2-2(\sqrt{3})(1)+1^2 = (\sqrt{3}-1)^2$$

بنابراین:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$$

اکنون داریم:

$$(*) \Rightarrow \sqrt{3}-1+1 = 2^{a+1}\times\sqrt{3} \Rightarrow 2^{a+1}=1 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

نکته: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a,b>0)$

نکته: $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2) = a^3\pm b^3$

حاصل هر کسر را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\quad (1)$$

$$\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{7+\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5})^3-(\sqrt{2})^3}{7+\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}^2+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2)}{7+\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(7+\sqrt{10})}{7+\sqrt{10}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}\quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow A = \sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2} = \sqrt{5}$$

اکنون خواستهٔ سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{4}{A-1} = \frac{4}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰ نکته: $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ = a^۳ - b^۳ - ۳ab(a-b)$

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$x^۳ = \left(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} - \sqrt[۳]{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\right)^۳ = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۳\sqrt[۳]{۳-۲}\underbrace{\left(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}-\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\right)}_{x}$$

$$\Rightarrow x^۳ = -۲\sqrt{۲} - ۳x \Rightarrow x^۳ + ۳x = -۲\sqrt{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱ نکته: $(a \pm b)^۳ = a^۳ \pm ۳a^۲b + ۳ab^۲ \pm b^۳$

$(\sqrt[n]{a})^n = a, (a > ۰, n \in \mathbb{N})$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$A = (۳-\sqrt{۸})^{\sqrt{۳}-۲}(۳+۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}+۱} = (۳-۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۲}(۳+۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۲+۳} = (۳-۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۲}(۳+۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۲}(۳+۲\sqrt{۲})^۳$$

$$\Rightarrow A = \Big[\underbrace{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}_{\text{مزدوج}}\Big]^{\sqrt{۳}-۲}(۳+۲\sqrt{۲})^۳ = \underbrace{(۹-۸)^{\sqrt{۳}-۲}}_{۱}(۳+۲\sqrt{۲})^۳$$

بنابراین:

$$A = (۳+۲\sqrt{۲})^۳ = ۲۷ + ۳(۹)(۲\sqrt{۲}) + ۳(۲\sqrt{۲})^۲(۳) + (۲\sqrt{۲})^۳ = ۲۷ + ۵۴\sqrt{۲} + ۷۲ + ۱۶\sqrt{۲} = ۹۹ + ۷۰\sqrt{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲ نکته: اگر n فرد باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = a$ و اگر عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

نکته: هرگاه $a > ۰$، به‌ازای هر دو عدد طبیعی m و n توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

ابتدا عبارت موردنظر را ساده می‌کنیم:

$$a\sqrt{a\sqrt[۳]{a\sqrt[۴]{a^۸}}} = a\sqrt{a\sqrt[۳]{a \times a^{\frac{۸}{۴}}}} = a\sqrt{a\sqrt[۳]{a^۳}} = a\sqrt{a \times a} = a\sqrt{a^۲} = a|a|$$

اکنون با توجه به اینکه $a = ۲-\sqrt{۵}$ عددی منفی است، داریم:

$$a|a| = (۲-\sqrt{۵})|۲-\sqrt{۵}| = (۲-\sqrt{۵})(\sqrt{۵}-۲) = -(۲-\sqrt{۵})^۲ = -(۴+۵-۴\sqrt{۵}) = ۴\sqrt{۵}-۹$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳ نکته: $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

مخرج عبارت $\frac{۱}{x}$ را گویا می‌کنیم تا ساده‌تر شود:

$$\frac{۱}{x} - ۲x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}-۲} - ۲(\sqrt[۳]{۹}-۲) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}-۲} \times \frac{\sqrt[۳]{۸۱}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴}{\sqrt[۳]{۸۱}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴} - ۲(\sqrt[۳]{۹}-۲)$$

$$= \frac{\sqrt[۳]{۳^۴}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴}{۹-۸} - ۲\sqrt[۳]{۹}+۴ = ۳\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴-۲\sqrt[۳]{۹}+۴ = ۳\sqrt[۳]{۳}+۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴ **نکته:** $(a\pm b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}\pm ۲ab$

راه‌حل اول:

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}+۲\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}+\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

راه‌حل دوم:

نکته: $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

صورت و مخرج A را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}+۲\sqrt{۳}}}{(۴-۲\sqrt{۳})-(۴+۲\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{(\sqrt{۳}-۱)-(\sqrt{۳}+۱)}{-۴\sqrt{۳}}=\frac{-۲}{-۴\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۶}+۴}-۲}\times\sqrt[۶]{\underbrace{x^{۶}+۸+۴\sqrt{x^{۶}+۴}}_{(\sqrt{x^{۶}+۴}+۲)^{۲}}}=\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۶}+۴}-۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۶}+۴}+۲}=\sqrt[۳]{(x^{۶}+۴)-۴}=x^{۲}$$

$$\sqrt{\sqrt[۳]{۳}-x^{۲}}\times\sqrt{x^{۴}+۳+x^{۲}\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt{(\sqrt[۳]{۳})^{۳}-(x^{۲})^{۳}}=\sqrt{۳-x^{۶}}$$

حال با جایگذاری $x=\sqrt[۴]{۲}$ داریم:

$$x^{۲}+\sqrt{۳-x^{۶}}=(\sqrt[۴]{۲})^{۲}+\sqrt{۳-(\sqrt[۴]{۲})^{۶}}=\sqrt{۲}+\sqrt{\underbrace{۳-۲\sqrt{۲}}_{(۱-\sqrt{۲})^{۲}}}=\sqrt{۲}+\left|۱-\sqrt{۲}\right|=۲\sqrt{۲}-۱$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶ می‌دانیم: $(\sqrt{۲}-۱)^{۲}=۳-۲\sqrt{۲}$ پس: $\alpha=\sqrt{\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}$

هم‌چنین:

$$\beta=\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}}=\sqrt[۳]{\frac{۲(۲-\sqrt{۲})}{\underbrace{(۲+\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲})}_{۴-۲=۲}}}=\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۲}}$$

حاصل عبارت $(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^{۲}-۳\alpha\beta)$ برابر است با:

$$(\alpha+\beta)(\underbrace{\alpha^{۲}+\beta^{۲}+۲\alpha\beta}_{\text{اتحاد مربع}}-۳\alpha\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha^{۲}+\beta^{۲}-\alpha\beta)\overset{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{=}\alpha^{۳}+\beta^{۳}=\sqrt{۲}-۱+۲-\sqrt{۲}=۱$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\ b=\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \end{array}\right. \Rightarrow ab=\sqrt{(x+1)-(x-1)}=\sqrt{2}$$

حالا فرض مسئله $a+b=\sqrt[4]{72}$ است و حاصل $a-b$ را می‌خواهد. می‌دانیم:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$\Rightarrow \sqrt{72}-(a-b)^2=4\sqrt{2}\Rightarrow 6\sqrt{2}-(a-b)^2=4\sqrt{2}\Rightarrow (a-b)^2=2\sqrt{2}\Rightarrow a-b=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^3}}=\sqrt[4]{2^3}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸

$$A=\frac{2(x-3)+(x+3)}{(x+3)(x-3)}\times\frac{3(x^2-9)}{(x+3)(x-1)}$$

$$A=\frac{3\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}\times\frac{3\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-1)}}=\frac{9}{x+3}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{x+3}}{A}=\frac{\frac{3}{x+3}}{\frac{9}{x+3}}=\frac{3}{\cancel{x+3}}\times\frac{\cancel{x+3}}{9}=\frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹

$$\frac{(2\times 2^x)(3\times 3^x)}{6^{x^2-4}}=\frac{1}{36}\Rightarrow\frac{(2^{x+1})(3^{x+1})}{6^{x^2-4}}=\frac{1}{6^2}$$

$$\Rightarrow\frac{6^{x+1}}{6^{x^2-4}}=6^{-x^2+x+5}=6^{-2}\to -x^2+x+5=-2\to x^2-x=7$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^4\times b^2\times c}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{b^4\times c^2\times a}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{c^4\times a^2\times b}}}$$

$$\sqrt[8]{a^4\times b^2\times c}\times\sqrt[8]{b^4\times c^2\times a}\times\sqrt[8]{c^4\times a^2\times b}$$

$$\sqrt[8]{a^7\times b^7\times c^7}=\sqrt[8]{(abc)^7}=\sqrt[8]{\left(2^{\frac{8}{7}}\right)^7}=\sqrt[8]{2^8}=2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱ ابتدا صورت کسر را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای این کار از ویژگی تابع مرکب استفاده می‌کنیم یعنی زیر رادیکال را به‌صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$\sqrt{۸۸+۱۸\sqrt{۷}}-\sqrt{۸۸-۱۸\sqrt{۷}}=\sqrt{(۹+\sqrt{۷})^{۲}}-\sqrt{(۹-\sqrt{۷})^{۲}}=|۹+\sqrt{۷}|-|۹-\sqrt{۷}|=۹+\sqrt{۷}-۹+\sqrt{۷}=۲\sqrt{۷}$$

حال عبارت مخرج کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\sqrt{۴-\sqrt{۷}}+\sqrt{۴+\sqrt{۷}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^{۲}=۴-\cancel{\sqrt{۷}}+۴+\cancel{\sqrt{۷}}+۲\sqrt{\underbrace{(۴-\sqrt{۷})(۴+\sqrt{۷})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}$$

$$A^{۲}=۸+۲\sqrt{۱۶-۷}\Rightarrow A^{۲}=۸+۲(۳)\Rightarrow A^{۲}=۱۴\xrightarrow[A>0]{}A=\sqrt{۱۴}$$

حال می‌توانیم حاصل کل عبارت را به دست بیاوریم:

$$\frac{۲\sqrt{۷}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۲\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}\sqrt{۷}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

$$A=\sqrt{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}+۴}}$$

$$A=\sqrt{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}{۲+۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}}$$

$$A=\sqrt{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲)+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}}$$

$$A=\sqrt{\frac{\cancel{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲}}{(\cancel{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲})(\sqrt{۲}+۱)}}\Rightarrow A=\sqrt{\underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}}_{\text{گویا کردن}}}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{\sqrt{۲}-۱}{۱}}\Rightarrow A=\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\Rightarrow A^{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

$$B=\sqrt[۳]{۵A^{۲}-۲}\Rightarrow B=\sqrt[۳]{۵(\sqrt{۲}-۱)-۲}\Rightarrow B=\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}-۷}\Rightarrow B=\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)^{۳}}\Rightarrow B=\sqrt{۲}-۱$$

$$A^{۲}B=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}-۱)=(\sqrt{۲}-۱)^{۲}=۳-۲\sqrt{۲}\qquad A^{۲}B+۲\sqrt{۲}=۳-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳

$$A=\sqrt{۸+۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}+\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}$$

$$A^{۲}=۸+\cancel{۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}+۸-\cancel{۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}+۲\sqrt{(۸+۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}})(۸-۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}})}$$

$$A^{۲}=۱۶+۲\sqrt{۶۴-(۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}})^{۲}}$$

$$A^{۲}=۱۶+۲\sqrt{۶۴-۴(۱۰+۲\sqrt{۵})}$$

$$A^{۲}=۱۶+۲\sqrt{۲۴-۸\sqrt{۵}}\Rightarrow A^{۲}=۱۶+۴\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}$$

$$A^{۲}=۱۶+۴\sqrt{(\sqrt{۵}-۱)^{۲}}\Rightarrow A^{۲}=۱۶+۴\left|\sqrt{۵}-۱\right|$$

$$A^{۲}=۱۶+۴(\sqrt{۵}-۱)\Rightarrow A^{۲}=۱۲+۴\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{A>۰}=\sqrt{۱۲+۴\sqrt{۵}}\Rightarrow A=\sqrt{۱۲+۲\sqrt{۲۰}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰})^{۲}}=\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}=\sqrt{\alpha}(۱+\sqrt{\beta})$$

$$\begin{matrix}A=\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}\\ A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha\beta}\end{matrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{حالت اول},\begin{cases}\alpha=۲\\ \beta=۵\end{cases}\Rightarrow\alpha\beta=۱۰\\ \\ \text{حالت دوم},\begin{cases}\alpha=۱۰\\ \beta=\frac{۱}{۵}\end{cases}\Rightarrow\alpha\beta=۲\end{array}\right.\Rightarrow \text{مجموع}=۱۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴

$$\begin{matrix}a_{۱}=x-۱\\ a_{۳}=۲x+۳\\ a_{۹}=۶x+۱۱\end{matrix}\qquad \left.\begin{matrix}۲d=x+۴\\ ۶d=۴x+۸\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=۴=d$$

پس $a_{۱}=۳$ و دنباله حسابی به صورت ...,۳,۷,۱۱,۱۵ است.

و داریم:

$$t_{۱}=a_{۲}=۷$$

$$t_{۲}=a_{۵}=۳+۴\times۴=۱۹$$

$$t_{۳}=a_{۱۰}=۳+۹\times۴=۳۹$$

افزایش‌های خطی $۷\xrightarrow{+۱۲}۱۹\xrightarrow{+۲۰}۳۹\xrightarrow{+۲۸}t_{۴}=۶۷$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

پاسخ تشریحی **گام اول**: ریشه‌های ششم α به ترتیب $+\sqrt[۴]{\alpha}$ و $-\sqrt[۴]{\alpha}$ هستند و اختلافشان $۲\sqrt[۴]{\alpha}$ است؛ پس داریم:

$$۲\sqrt[۴]{\alpha}=۱\xrightarrow{\div۲}\sqrt[۴]{\alpha}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۶}}\alpha=\frac{۱}{۶۴}$$

گام دوم: اختلاف ریشه‌های چهارم α برابر است با:

$$\sqrt[۴]{\alpha}-(-\sqrt[۴]{\alpha})=۲\sqrt[۴]{\alpha}=۲\sqrt[۴]{\frac{۱}{۶۴}}=\beta$$

گام سوم: بنابراین $\frac{\alpha}{\beta^{۲}}$ برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۶۴}}{(۲\sqrt[۴]{\frac{۱}{۶۴}})^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۶۴}}{۴\times\sqrt{\frac{۱}{۶۴}}}=\frac{\frac{۱}{۶۴}}{۴\times\frac{۱}{۸}}=\frac{\frac{۱}{۶۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶ پاسخ تشریحی با توجه به این‌که $-1<a<0$ است، داریم: $a^2>0>a^3>a>\sqrt[3]{a}$، پس در $A=|\underbrace{\sqrt[3]{a}+a}_{\ominus}|-|\underbrace{a-\sqrt[3]{a}}_{\oplus}|$ عبارت به صورت $-\sqrt[3]{a}-a-(a-\sqrt[3]{a})$ است، می‌شود $A=-2a=\frac{1}{4}$، پس $a=\frac{-1}{8}$.

پس داریم: $|\underbrace{a^2-a^3}_{\frac{1}{64}+\frac{1}{512}}|+|\underbrace{a+a^2}_{-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}}|=|\frac{9}{512}|+|\frac{7}{64}|=\frac{9}{512}+\frac{7}{64}=\frac{9+56}{512}=\frac{65}{512}$

البته می‌توانستیم اول عبارت خواسته‌شدهٔ صورت سؤال را به صورت $\underbrace{a^2-a^3-(a+a^2)}_{-a^3-a}$ ساده‌تر کنیم و بعد $-\frac{1}{8}$ را قرار دهیم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷ پاسخ تشریحی **گام اول:** $7+4\sqrt{3}$ را می‌شناسیم. همان $(2+\sqrt{3})^2$ است، پس: $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

گام دوم: حالا $\sqrt{6}$ را در عبارت به‌دست‌آمده در گام اول ضرب می‌کنیم: $\sqrt{6}.\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

گام سوم: با کمی دقت $12+6\sqrt{3}$ همان $(3+\sqrt{3})^2$ است، پس داریم: $\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}=3+\sqrt{3}$

گام چهارم: $\sqrt{3}$ به طور تقریبی برابر با $1/7$ است، پس پاسخ می‌شود: $4/7\simeq 5$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸ پاسخ تشریحی **گام اول:** سمت چپ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم و آن را به صورت توان گویا می‌نویسیم:

$$(\underbrace{8}_{2^3}\sqrt[3]{\underbrace{4}_{2^2}\underbrace{\sqrt{2}}_{2^{\frac{1}{2}}}})^{\frac{3}{2}}=(2^3\times\sqrt[3]{\underbrace{2^{2+\frac{1}{2}}}_{2^{\frac{5}{2}}}})^{\frac{3}{2}}=(2^3\times 2^{\frac{5}{2\times3}})^{\frac{3}{2}}=(2^{3+\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}}=(2^{\frac{23}{6}})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{23}{6}\times\frac{3}{2}}=2^{\frac{23}{4}}$$

گام دوم: سمت راست تساوی را به صورت توان گویا می‌نویسیم: $(\sqrt[n]{2})^m=(2^{\frac{1}{n}})^m=2^{\frac{m}{n}}$

گام سوم: دو طرف تساوی را مساوی هم قرار می‌دهیم: $2^{\frac{23}{4}}=2^{\frac{m}{n}}\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{23}{4}=5/75$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹ پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، داریم:

$$\underbrace{a^3+b^3}_{18}=(\underbrace{a+b}_{3})^3-3ab(\underbrace{a+b}_{3})\Rightarrow 18=27-9ab\Rightarrow ab=1$$

گام دوم: عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1+a^8}+\frac{1}{1+b^8}\overset{\text{مخرج مشترک}}{=\!=}\frac{1+b^8+1+a^8}{1+a^8+b^8+\underbrace{(ab)^8}_{1}}=\frac{a^8+b^8+2}{a^8+b^8+2}=1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰ پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا عبارت داده‌شده برای a را ساده می‌کنیم. توجه کنید که عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت.

$$a=\frac{۱}{\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}}\ ,\ \underbrace{۷}_{۳+۴}+\underbrace{۴\sqrt{۳}}_{۲\times۲\times\sqrt{۳}}=(\sqrt{۳})^{۲}+۲^{۲}+۲\times۲\times\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^{۲}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}}=\frac{۱}{|۲+\sqrt{۳}|}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\overbrace{\underbrace{\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}}_{\text{مزدوج مخرج}}}^{\text{مخرج کسر را گویا می‌کنیم.}}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲-\sqrt{۳}\Rightarrow a=۲-\sqrt{۳}\quad (۱)$$

گام دوم: با توجه به خواستهٔ سؤال $\frac{۱}{a}$ را نیز حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{a}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}}=۲+\sqrt{۳}\quad(۲)$$

گام سوم: عبارت $(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۲}}\times(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم.

$$(\underbrace{a+\frac{۱}{a}}_{A}-\underbrace{\sqrt{۲}}_{B})^{\frac{۱}{۲}}\times(\underbrace{a+\frac{۱}{a}}_{A}+\underbrace{\sqrt{۲}}_{B})^{\frac{۱}{۲}}=(A^{۲}-B^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$((a+\frac{۱}{a})^{۲}-(\sqrt{۲})^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\overset{(۲),(۱)}{=\!=}((\underbrace{۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}}_{۴})^{۲}-۲)^{\frac{۱}{۲}}=(۱۶-۲)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱ پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق صورت سؤال مربع عبارت $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{a}$ برابر با $۸+\sqrt{۸}+\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۰}$ است.

$$(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{a})^{۲}=۸+\sqrt{۸}+\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۰}$$

گام دوم: با استفاده از اتحاد مربع سه‌جمله‌ای، عبارت گام اول را ساده می‌کنیم.

$$۱^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}+(\sqrt{a})^{۲}+۲\times۱\times\sqrt{۲}+۲\times۱\times\sqrt{a}+۲\times\sqrt{۲}\times\sqrt{a}=۸+\sqrt{\underbrace{۸}_{۴\times۲}}+\sqrt{\underbrace{۲۰}_{۴\times۵}}+\sqrt{\underbrace{۴۰}_{۴\times۲\times۵}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۱+۲+a)}_{۳+a}+۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{a}+۲\sqrt{۲a}=۸+۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۲\times۵}\quad(۱)$$

گام سوم: از مقایسهٔ دو طرف تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم که $a=۵$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲ پاسخ تشریحی **گام اول:** طرفین عبارت D را به توان ۲ می‌رسانیم، تا رادیکال‌ها ساده شوند و بتوانیم عبارت ساده‌تری به دست بیاوریم:

$$D=\sqrt{۳-\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}}-\sqrt{۳+\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}}$$

$$\Rightarrow D^{۲}=(۳-\cancel{\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}})+(۳+\cancel{\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}})-۲\sqrt{(۳-\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱})(۳+\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱})}$$

$$\Rightarrow D^{۲}=۶-۲\sqrt{۹-(\sqrt{۲۸}+۱)}=۶-۲\sqrt{۸-\sqrt{۲۸}}=۶-۲\sqrt{۸-۲\sqrt{۷}}$$

گام دوم: عبارت $۸-۲\sqrt{۷}$ را می‌توان به صورت $(\sqrt{۷}-۱)^{۲}$ نوشت؛ بنابراین:

$$D^{۲}=۶-۲|\sqrt{۷}-۱|=۶-۲(\sqrt{۷}-۱)=۶-۲\sqrt{۷}+۲=۸-۲\sqrt{۷}=(\sqrt{۷}-۱)^{۲}$$

گام سوم: مقدار D، عددی منفی است، زیرا $\sqrt{۳+\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}}$ بیشتر از $\sqrt{۳-\sqrt{\sqrt{۲۸}+۱}}$ است؛ بنابراین $D=-(\sqrt{۷}-۱)=۱-\sqrt{۷}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳ اگر $\sqrt{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ را در $\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}$ ضرب و تقسیم کنیم داریم:

$$\sqrt{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\times\frac{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{3})^3+1^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}$$

حال داریم:

$$\sqrt{\sqrt[3]{9}+6}-\frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}+6)}-2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{3+6\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+6}-2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt{9+6\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}-2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{(3+\sqrt[3]{3})^2}-2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{3+\sqrt[3]{3}-2}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}+1}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴ اگر n فرد باشد، ریشهٔ n ام عدد a برابر $a^{\frac{1}{n}}$ است و اگر n زوج باشد، ریشه‌های n ام عدد a برابر $\pm a^{\frac{1}{n}}$ است.

$$a^{\frac{1}{5}}=(-a^{\frac{1}{10}})(a^{\frac{1}{10}})+6\Rightarrow a^{\frac{1}{5}}=-a^{\frac{1}{5}}+6\Rightarrow a^{\frac{1}{5}}=3$$

ریشهٔ پنجم ۳۲ برابر ۲ است.

$$\Rightarrow a=3^5\Rightarrow\frac{a}{9}=27\Rightarrow\frac{a}{9}+5=32$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵ مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$A=\frac{\sqrt{a^4+1}+a-\sqrt{a^4+1}+a}{(a^4+1)-a^2}=\frac{2a}{a^4-a^2+1}=\frac{2a(a^2+1)}{(a^2+1)(a^4-a^2+1)}=\frac{2a(a^2+1)}{a^6+1}=\frac{2a(a^2+1)}{2a^2+2}=a$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶

$$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2=3\sqrt{2}-\cancel{4}+3\sqrt{2}+\cancel{4}+\alpha^2\beta^2$$

$$\Rightarrow\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\sqrt[4]{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}\right)^2=\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $=6\sqrt{2}+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ می‌دانیم: $2^a=25=5^2\Rightarrow 2^{\frac{a}{2}}=5$

$$5^b=8\Rightarrow(2^{\frac{a}{2}})^b=2^3\Rightarrow 2^{\frac{ab}{2}}=2^3\Rightarrow\frac{ab}{2}=3\Rightarrow ab=6$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۸ با توجه به آن‌که $0<x<1$، پس x دارای ۲ ریشه دوم است که قرینه یکدیگر هستند و یک ریشه سوم دارد که با x هم‌علامت است.

از طرفی، $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}$، پس:

$$\begin{aligned}a&=\sqrt[3]{x}\\ b&=\sqrt{x}\\ c&=-\sqrt{x}\end{aligned}\Rightarrow 4ab+c=0$$

$$\Rightarrow 4\sqrt[3]{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}=0\Rightarrow\sqrt{x}(4\sqrt[3]{x}-1)=0$$

$$\sqrt[3]{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{64}\Rightarrow x=2^{-6}\Rightarrow x^{-\frac{1}{6}}=2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۹ چون $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$، پس $0 < a < 1$ و در نتیجه: $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a} < a$.

بنابراین:

$$\overbrace{\left|a-\sqrt[4]{a}\right|}^{-}-\overbrace{\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a}\right|}^{-}=-(a-\sqrt[4]{a})-\left[-(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a})\right]=-(a-\sqrt[4]{a})+(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a})=-a+\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{a}-a$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۰

$$A=\sqrt[4]{\frac{1}{8+3\sqrt{7}}}\times\sqrt[4]{(3+\sqrt{7})^2}\Rightarrow A=\sqrt[4]{\frac{(16+6\sqrt{7})}{8+3\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{\frac{2(8+3\sqrt{7})}{8+3\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{2}$$

پس، $\sqrt[4]{8}A$ یک عدد صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{8}A=\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{16}=2$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۱ ابتدا A را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt[4]{2^3\times 3}\times\sqrt[3]{3\times 2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow A=2^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{5}{12}}\times 2^{\frac{1}{12}}$$

$$A=2^{\frac{10}{12}}\times 3^{\frac{8}{12}}\Rightarrow A=2^{\frac{5}{6}}\times 3^{\frac{4}{6}}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=2^{-\frac{5}{6}}\times 3^{-\frac{4}{6}}\Rightarrow 6A^{-1}=2^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{2}{6}}\Rightarrow 6A^{-1}=\sqrt[6]{2\times 9}=\sqrt[6]{18}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۲ ابتدا فرض مسئله را به کمک نکته فوق، تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3\times x\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt[9]{x^4\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt[9]{\sqrt{x^8\times x}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt[18]{x^9}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}x=\frac{1}{4}$$

حال به سراغ خواسته سوال می‌رویم، اما قبل از جایگذاری x در آن، فرم کلی آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{x^4}{x}}}=\sqrt[12]{x^3}=\sqrt[4]{x}$$

حال $x=\frac{1}{4}$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$A=\sqrt[4]{x}\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^{-2}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۳ ابتدا به سراغ عبارت دومی که صورت سوال داده است می‌رویم و در سمت چپ آن از ۲ فاکتور می‌گیریم:

$$۲\sqrt{x+۲}-۲\sqrt{x-a}=۳ \Rightarrow ۲(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-a})=۳ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} \sqrt{x+۲}-\sqrt{x-a}=\frac{۳}{۲}$$

با دقت به عبارت به دست آمده و صورت سوال می‌بینیم که سمت چپ عبارت به دست آمده، مزدوج سمت چپ عبارت اول صورت سوال است، پس داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-a}=\frac{۳}{۲}\\ \sqrt{x+۲}+\sqrt{x-a}=a\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در هم ضرب می‌کنیم}} \underbrace{(\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-a})(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-a})}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\frac{۳}{۲}a \Rightarrow (\sqrt{x+۲})^۲-(\sqrt{x-a})^۲=\frac{۳}{۲}a$$

$$\Rightarrow x+۲-(x-a)=\frac{۳}{۲}a \Rightarrow \cancel{x}+۲-\cancel{x}+a=\frac{۳}{۲}a$$

$$\Rightarrow ۲+a=\frac{۳}{۲}a \Rightarrow \frac{۳}{۲}a-a=۲ \Rightarrow a=۴$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۴ عبارات داده شده در صورت سوال، ذهن ما را به سمت اتحادهای مربع دوجمله‌ای و چاق و لاغر می‌برد، حال با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای و داده‌های سوال داریم:

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲+۲ab \xrightarrow[ab=۴]{a^۲+b^۲=۱۰} (a+b)^۲=۱۰+۲(۴)=۱۸ \xrightarrow[a+b>۰]{a,b>۰} (a+b)=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

حالا برای محاسبهٔ خواستهٔ سوال به سراغ اتحاد چاق و لاغر می‌رویم:

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$$

$$\xrightarrow[a^۲+b^۲=۱۰,ab=۴]{a+b=۳\sqrt{۲}} a^۳+b^۳=(۳\sqrt{۲})(۱۰-۴)=۱۸\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۵ ابتدا عبارت خواسته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x\sqrt{x}-\frac{۱}{x\sqrt{x}}=x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{x^{\frac{۳}{۲}}}=(x^{\frac{۱}{۲}})^۳-\frac{۱}{(x^{\frac{۱}{۲}})^۳}=(\sqrt{x})^۳-\frac{۱}{(\sqrt{x})^۳}$$

حال به کمک اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)^۳+۳ab(a-b)$، داریم:

$$(\sqrt{x})^۳-\frac{۱}{(\sqrt{x})^۳}=(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})^۳+۳\underbrace{(\sqrt{x})(\frac{۱}{\sqrt{x}})}_{=۱}(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

از طرفی، می‌دانیم که $\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}=\sqrt{۲}$ است. پس:

$$x\sqrt{x}-\frac{۱}{x\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^۳-\frac{۱}{(\sqrt{x})^۳}=(\sqrt{۲})^۳+۳\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۶ **روش اول:**

تجزیهٔ یک چندجمله‌ای، یعنی عبارت را به صورت ضرب چند عامل بنویسیم به طوری که عبارت‌های به دست آمده تجزیه نشوند.

در این تست، در ابتدا فرض می‌کنیم $A = ۲x - ۱$، در این صورت:

$$A^۳ - ۴A^۲ + A - ۴ = (A^۳ + A) + (-۴A^۲ - ۴) = A(A^۲ + ۱) - ۴(A^۲ + ۱) = (A - ۴)(A^۲ + ۱)$$

حال، A را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow (۲x - ۱ - ۴)\left((۲x - ۱)^۲ + ۱\right) = (۲x - ۵)(۴x^۲ - ۴x + ۲)$$

چون در عبارت $۴x^۲ - ۴x + ۲$، مقدار Δ منفی است، پس دیگر عبارت قابل تجزیه نمی‌باشد، لذا تجزیه آن $(۲x - ۵)(۴x^۲ - ۴x + ۲)$ است.

روش دوم:

عددگذاری: ریشهٔ هر یک از گزینه‌ها را در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم، اگر برابر صفر شد، بر آن عبارت بخش‌پذیر است.

$$۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \; , \; f\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۶۴ - ۶۴ + ۴ - ۴ = ۰$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۷ ابتدا به کمک رابطه $\sqrt{a + b \pm ۲\sqrt{ab}} = \left|\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right|$، داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \left|\sqrt{۲} + ۱\right| \\ \sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}} = \left|\sqrt{۲} - ۱\right| \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده را در عبارت صورت سوال قرار می‌دهیم:

$$A = \frac{۳ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۲}}} + \frac{۳ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}}} = \frac{۳ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \left|\sqrt{۲} + ۱\right|} + \frac{۳ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \left|\sqrt{۲} - ۱\right|}$$

$$A = \frac{۳ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۲} + ۱} + \frac{۳ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۲} - ۱} = \frac{۳ + \sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲} + ۱} + \frac{۳ - \sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲} - ۱}$$

حال در عبارت فوق به کمک اتحاد مزدوج، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A = \frac{(۳ + \sqrt{۲})(۲\sqrt{۲} - ۱) + (۳ - \sqrt{۲})(۲\sqrt{۲} + ۱)}{(۲\sqrt{۲})^۲ - ۱} = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۸ ابتدا حاصل هر یک از عبارت‌ها را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۵ - ۲\sqrt{۶}} - \frac{۱}{۵ + ۲\sqrt{۶}} = \frac{(۵ + ۲\sqrt{۶}) - (۵ - ۲\sqrt{۶})}{(۵ - ۲\sqrt{۶})(۵ + ۲\sqrt{۶})} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲۵ - ۲۴} = ۴\sqrt{۶}$$

در عبارت بعدی باید مخرج کسر را گویا کنیم:

$$\frac{\sqrt{۳ + \sqrt{۳}}}{\sqrt{۳ - \sqrt{۳}}} \times \frac{\sqrt{۳ + \sqrt{۳}}}{\sqrt{۳ + \sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{(۳ + \sqrt{۳})^۲}}{\sqrt{۹ - ۳}} = \frac{\left|۳ + \sqrt{۳}\right|}{\sqrt{۶}} = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

$$A = ۴\sqrt{۶} \times \frac{۳ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} = ۱۲ + ۴\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۹ ابتدا حاصل هر یک از عبارت‌ها را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{5-2\sqrt{6}}-\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=\frac{(5+2\sqrt{6})-(5-2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}=\frac{4\sqrt{6}}{25-24}=4\sqrt{6}$$

در عبارت بعدی باید مخرج کسر را گویا کنیم:

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{9-3}}=\frac{|\overbrace{3+\sqrt{3}}^{+}|}{\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

$$A=4\sqrt{6}\times\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=12+4\sqrt{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۰

$$\sqrt{8}+\sqrt{27}=\sqrt{2^3}+\sqrt{3^3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{6}+3)\Rightarrow\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرفی: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$ و چون $(3-\sqrt{2})^2=9-6\sqrt{2}+2=11-6\sqrt{2}$

بنابراین:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$$

با جمع سه قسمت حاصل برابر $\sqrt{2}+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+3-\sqrt{2}=5$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۱ **نکته (اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای):**

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

نکته (اتحاد مربع دو جمله‌ای):

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

عبارت صورت و مخرج را با استفاده از اتحادها تجزیه کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{x^6+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{(x^2)^3+1^3}{((x^2)^2+2x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2(x^4-x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۲ **نکته:** اگر n فرد باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n}=a$ و اگر عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

نکته: هرگاه $a>0$، به‌ازای هر دو عدد طبیعی m و n توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

ابتدا عبارت موردنظر را ساده می‌کنیم:

$$a\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^8}}}=a\sqrt{a\sqrt[3]{a\times a^{\frac{8}{4}}}}=a\sqrt{a\sqrt[3]{a^3}}=a\sqrt{a\times a}=a\sqrt{a^2}=a|a|$$

اکنون با توجه به اینکه $a=2-\sqrt{5}$ عددی منفی است، داریم:

$$a|a|=(2-\sqrt{5})|2-\sqrt{5}|=(2-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)=-(2-\sqrt{5})^2=-(4+5-4\sqrt{5})=4\sqrt{5}-9$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۳

نکته: $(a\pm b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}\pm ۲ab$

راه‌حل اول:

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}+۲\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}+\sqrt{(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

راه‌حل دوم:

نکته: $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

صورت و مخرج A را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}\times\frac{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}-۲\sqrt{۳}}-\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}+۱^{۲}+۲\sqrt{۳}}}{(۴-۲\sqrt{۳})-(۴+۲\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{(\sqrt{۳}-۱)-(\sqrt{۳}+۱)}{-۴\sqrt{۳}}=\frac{-۲}{-۴\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۱\times\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۴

نکته: $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ نکته: $(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$

نکته: اگر $x>۰$، آنگاه $\sqrt{x}=\sqrt[۴]{x^{۲}}$ نکته: اگر $a,b>۰$، آنگاه $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

راه‌حل اول: با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A=\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt[۴]{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}}\times\sqrt[۴]{(۵+۲\sqrt{۶})}=\sqrt[۴]{(۳+۲-۲\sqrt{۶})}\times\sqrt[۴]{(۵+۲\sqrt{۶})}$$

$$=\sqrt[۴]{(۵-۲\sqrt{۶})(۵+۲\sqrt{۶})}=\sqrt[۴]{۵^{۲}-(۲\sqrt{۶})^{۲}}=\sqrt[۴]{۲۵-۲۴}=۱$$

راه‌حل دوم: با استفاده از نکات بالا داریم:

$$A=\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲}}=\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\sqrt{\sqrt{۳}^{۲}-\sqrt{۲}^{۲}}=\sqrt{۳-۲}=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۵

نکته: $(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}=a^{۳}-b^{۳}-۳ab(a-b)$

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$x^{۳}=(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}-\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}})^{۳}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۳\sqrt[۳]{۳-۲}(\underbrace{\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}-\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}_{x})$$

$$\Rightarrow x^{۳}=-۲\sqrt{۲}-۳x\Rightarrow x^{۳}+۳x=-۲\sqrt{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۶

با توجه به نمودار $x^{۳}-\frac{x}{۲}>\frac{x}{۲}\Leftarrow a>\frac{x}{۲}$ است. بنابراین: $x^{۳}>x\xrightarrow{x<۰}-۱<x<۰$

می‌دانیم:

$$\begin{cases}-۱<x<۰\Rightarrow -۱<x^{۳}<۰\\ -۱<x<۰\Rightarrow ۰<x+۱<۱\end{cases}$$

خواهیم داشت: $-۱<x^{۳}(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x^{۴}+x^{۳}<۰$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۷ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}+\frac{۴}{۸-x}}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴-۴}{x-۸}}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{\frac{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x}+۲)}{x-۸}}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{\sqrt[۳]{x}}{x-۸}\Rightarrow a=۱,\ b=۰\ ,c=۱\ ,\ d=-۸$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow ad+b-c=-۸+۰-۱=-۹$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۸ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۲/۵+\sqrt{۶}}-\sqrt{۱/۵}=\sqrt{\frac{۵}{۲}+\sqrt{۶}}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\frac{\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}}{\sqrt{۲}}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۹ اگر $k=۹۹۹۹۹۹۹۹۹^۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$k-۱=۹۹۹۹۹۹۹۹۹^۲-۱=(۹۹۹۹۹۹۹۹۹-۱)(۹۹۹۹۹۹۹۹۹+۱)=(۹۹۹۹۹۹۹۹۸)\times ۱۰^۹=\underbrace{۹۹...۹}_{\text{۸تا}}\ ۸\ \underbrace{۰۰...۰}_{\text{۹تا}}$$

بنابراین:

$$k=\underbrace{۹۹...۹}_{\text{۸تا}}\ ۸\ \underbrace{۰۰...۰}_{\text{۸تا}}\ ۱\Rightarrow m=n=a=۸$$

در نتیجه:

$$m+n-a=۸$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۰ **$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$: نکته (اتحاد مجموع مکعب دوجمله)**

صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{۲}^۲-\sqrt[۳]{۲}+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}^۲-\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲}^۲-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۱ **$\sqrt{x^۲}=|x|$: نکته**

$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$: نکته

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\frac{\sqrt[۳]{a^۷\sqrt{a^۲}}}{\sqrt[۶]{a^۴}}=\frac{\sqrt[۳]{a^۷|a|}}{\sqrt[۳]{a^۲}}\ \underline{\underline{a<۰}}\ \sqrt[۳]{\frac{a^۷\times(-a)}{a^۲}}=\sqrt[۳]{\frac{-a^۸}{a^۲}}=\sqrt[۳]{-a^۶}=-a^۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۲ نکته (اتحاد مزدوج) : $(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$

با ضرب کردن مزدوج مخرج کسر در صورت و مخرج هر کدام از کسرها، آن‌ها را گویا کرده و سپس به ساده کردن حاصل عبارت می‌پردازیم:

$$A=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)}+\frac{۲(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}+\frac{۲(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})}{(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})}+\cdots+\frac{۲(\sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۷})}{(\sqrt{۹۹}+\sqrt{۹۷})(\sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۷})}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{۳-۱}+\frac{۲(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{۵-۳}+\frac{۲(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})}{۷-۵}+\cdots+\frac{۲(\sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۷})}{۹۹-۹۷}=\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۵}-\sqrt{۳}+\sqrt{۷}-\sqrt{۵}+\cdots+\sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۷}$$

به‌جز دو جمله -۱ و $\sqrt{۹۹}$، سایر جملات دوبه‌دو قرینهٔ هم‌اند و با یکدیگر ساده می‌شوند. پس داریم: $A=\sqrt{۹۹}-۱=۳\sqrt{۱۱}-۱$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۳ نکته: برای هر عدد طبیعی $n\geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$

با توجه به نکته و طبق فرض داریم: $\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}=۹ \Rightarrow a\sqrt{a}=۹^{۳} \Rightarrow (\sqrt{a})^{۳}=۹^{۳} \Rightarrow \sqrt{a}=۹ \Rightarrow a=۸۱$

حال داریم: $A=\sqrt[۳]{۲\times\sqrt{۸۱}+۸۱+۲۶}=\sqrt[۳]{۲\times ۹+۸۱+۲۶}=\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۴ نکته: $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$, $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{x^{۶}+۱}{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}\div\frac{x^{۴}-x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱}=\frac{(x^{۲}+۱)(x^{۴}-x^{۲}+۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}\times\frac{x^{۲}+۱}{x^{۴}-x^{۲}+۱}=\frac{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۴}-x^{۲}+۱)}{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۴}-x^{۲}+۱)}=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۵ نکته: $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

راه‌حل اول:

دو طرف عبارت $\sqrt{x+۵}+\sqrt{x-۳}=۸$ را در $\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt{x+۵}+\sqrt{x-۳})(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳})=۸(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+۵})^{۲}-(\sqrt{x-۳})^{۲}=۸(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳})$$

$$\Rightarrow x+۵-x+۳=۸(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳})$$

$$\Rightarrow ۸=۸(\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳}) \Rightarrow \sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳}=۱$$

راه‌حل دوم:

ابتدا مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x+۵}+\sqrt{x-۳}=۸ \Rightarrow \sqrt{x+۵}=۸-\sqrt{x-۳} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+۵=۶۴+x-۳-۱۶\sqrt{x-۳} \Rightarrow ۱۶\sqrt{x-۳}=۵۶$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}=۷ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴(x-۳)=۴۹ \Rightarrow x-۳=\frac{۴۹}{۴} \Rightarrow x=۳+\frac{۴۹}{۴}=\frac{۶۱}{۴}$$

حال با جای‌گذاری این مقدار در عبارت موردنظر داریم:

$$\sqrt{x+۵}-\sqrt{x-۳}=\sqrt{\frac{۶۱}{۴}+۵}-\sqrt{\frac{۶۱}{۴}-۳}=\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}-\sqrt{\frac{۴۹}{۴}}=\frac{۹}{۲}-\frac{۷}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۶

نکته: $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \quad , \quad a^۳+b^۳ = (a+b)(a^۲-ab+b^۲)$

با توجه به نکتهٔ بالا و ترتیب سؤال داریم:

$$x+y=۱ \Rightarrow (x+y)^۲=۱^۲ \Rightarrow x^۲+۲xy+y^۲=۱$$

$$\Rightarrow (x^۲+y^۲)+۲xy=۱ \xrightarrow{x^۲+y^۲=۵} ۵+۲xy=۱ \Rightarrow ۲xy=-۴ \Rightarrow xy=-۲$$

بنابراین: $x^۳+y^۳=(x+y)(x^۲-xy+y^۲)=۱(۵-(-۲))=۷$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۷

نکته: $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

نکته: $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۳\sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳}(\sqrt{\sqrt{۵}-\sqrt{۲}})}\times\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}}{\sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}}=\frac{۳(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}(\sqrt{۵-۲})}=\frac{۳(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{۳(\sqrt{۵}+\sqrt{۲})}{۳}=\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۸

نکته: اگر $a>۰$ و k,n,m اعداد طبیعی باشند، آنگاه: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$

نکته: اگر $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ تعریف‌شده باشند، آنگاه: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

راه‌حل اول:

ابتدا فرجهٔ رادیکال اول را به ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۶}+۲}\times\sqrt[۶]{۱۰-۴\sqrt{۶}}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}+۲)^۲}\times\sqrt[۶]{۱۰-۴\sqrt{۶}}$$

$$=\sqrt[۶]{۶+۴\sqrt{۶}+۴}\times\sqrt[۶]{۱۰-۴\sqrt{۶}}=\sqrt[۶]{۱۰+۴\sqrt{۶}}\times\sqrt[۶]{۱۰-۴\sqrt{۶}}$$

$$=\sqrt[۶]{(۱۰+۴\sqrt{۶})(۱۰-۴\sqrt{۶})}=\sqrt[۶]{۱۰۰-۹۶}=\sqrt[۶]{۴}=\sqrt[۶]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۲}$$

راه‌حل دوم:

عبارت زیر رادیکال دوم را به‌صورت اتحاد می‌نویسیم و داریم:

$$۱۰-۴\sqrt{۶}=(\sqrt{۶})^۲-۲(۲)(\sqrt{۶})+(۲)^۲=(\sqrt{۶}-۲)^۲$$

$$(\sqrt[۳]{\sqrt{۶}+۲})(\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}-۲)^۲})=\sqrt[۳]{\sqrt{۶}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۶}-۲}=\sqrt[۳]{۶-۴}=\sqrt[۳]{۲}$$

(دقت کنید: $\sqrt[۶]{(\sqrt{۶}-۲)^۲}=\sqrt[۳]{|\underbrace{\sqrt{۶}-۲}_{>۰}|}=\sqrt[۳]{\sqrt{۶}-۲}$)

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۹

$$A=\frac{۲(x-۳)+(x+۳)}{(x+۳)(x-۳)}\times\frac{۳(x^۲-۹)}{(x+۳)(x-۱)}$$

$$A=\frac{۳\cancel{(x-۱)}}{(x+۳)\cancel{(x-۳)}}\times\frac{۳\cancel{(x-۳)}\cancel{(x+۳)}}{\cancel{(x+۳)}\cancel{(x-۱)}}=\frac{۹}{x+۳}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\frac{۳}{x+۳}}{A}=\frac{\frac{۳}{x+۳}}{\frac{۹}{x+۳}}=\frac{۳}{\cancel{x+۳}}\times\frac{\cancel{x+۳}}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۰ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}+\sqrt{\sqrt[۳]{۴}(\sqrt[۳]{۴}-۱)}=\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}(۱+\sqrt{\sqrt[۳]{۴}})$$
$$=\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}(۱+\sqrt[۳]{۲})$$
$$=\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}\times\sqrt{(۱+\sqrt[۳]{۲})^۲}$$
$$=\sqrt{(\sqrt[۳]{۴}-۱)(۱+\sqrt[۳]{۲})^۲}$$
$$=\sqrt{(\sqrt[۳]{۴}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+۱+۲\sqrt[۳]{۲})}$$
$$=\sqrt{\cancel{\sqrt[۳]{۱۶}}+\cancel{\sqrt[۳]{۴}}+۲\underbrace{\sqrt[۳]{۸}}_{۴}-\cancel{\sqrt[۳]{۴}}-۱-\cancel{۲\sqrt[۳]{۲}}}=\sqrt{۳}\to\frac{۱۲}{\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-۱}+\sqrt{\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۴}}}+۸=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}+۸=۴\sqrt{۳}+۸$$
$$۴\sqrt{۳}+۸\xrightarrow{\text{ریشه دوم مثبت}}\sqrt{۴\sqrt{۳}+۸}=\sqrt{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲}=|\sqrt{۶}+\sqrt{۲}|=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۱

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^۴\times b^۲\times c}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{b^۴\times c^۲\times a}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{c^۴\times a^۲\times b}}}\Rightarrow\sqrt[۸]{a^۴\times b^۲\times c}\times\sqrt[۸]{b^۴\times c^۲\times a}\times\sqrt[۸]{c^۴\times a^۲\times b}$$
$$\sqrt[۸]{a^۷\times b^۷\times c^۷}=\sqrt[۸]{(abc)^۷}=\sqrt[۸]{\left(۲^{\frac{۸}{۷}}\right)^۷}=\sqrt[۸]{۲^۸}=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۲ ابتدا صورت کسر را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای این کار از ویژگی تابع مرکب استفاده می‌کنیم یعنی زیر رادیکال را به‌صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$\sqrt{۸۸+۱۸\sqrt{۷}}-\sqrt{۸۸-۱۸\sqrt{۷}}=\sqrt{(۹+\sqrt{۷})^۲}-\sqrt{(۹-\sqrt{۷})^۲}=|۹+\sqrt{۷}|-|۹-\sqrt{۷}|$$
$$=۹+\sqrt{۷}-۹+\sqrt{۷}=۲\sqrt{۷}$$

حال عبارت مخرج کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$A=\sqrt{۴-\sqrt{۷}}+\sqrt{۴+\sqrt{۷}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^۲=۴-\cancel{\sqrt{۷}}+۴+\cancel{\sqrt{۷}}+۲\sqrt{\underbrace{(۴-\sqrt{۷})(۴+\sqrt{۷})}_{\text{اتحاد مزدوج}}}$$
$$A^۲=۸+۲\sqrt{۱۶-۷}\Rightarrow A^۲=۸+۲(۳)\Rightarrow A^۲=۱۴\xrightarrow[A>۰]{}A=\sqrt{۱۴}$$

حال می‌توانیم حاصل کل عبارت را به دست بیاوریم:

$$\frac{۲\sqrt{۷}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۲\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}\sqrt{۷}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۳

$$A=\frac{۳+\sqrt{۶}}{۵\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}}=\frac{۳+\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}.\sqrt{۳}+\sqrt{۳}.\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۳}\,\cancel{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}}{\cancel{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}=\sqrt{۳}\Rightarrow A=\sqrt{۳}$$

$$\frac{A^{۲}}{A\sqrt[۴]{A}}=\frac{A}{\sqrt[۴]{A}}=\sqrt[۴]{A^{۵}}=\sqrt[۴]{(\sqrt{۳})^{۵}}=\sqrt[۱۲]{۳^{۵}}=\sqrt[۱۲]{B}\Rightarrow B=۳^{۵}=۲۴۳$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۴

$$x\sqrt[۳]{x}-۴x+۲\sqrt[۳]{x^{۲}}=۰\xrightarrow{\div x}\sqrt[۳]{x}-۴+\frac{۲}{\sqrt[۳]{x}}=۰\Rightarrow\underbrace{\sqrt[۳]{x}}_{a}+\frac{۲}{\underbrace{\sqrt[۳]{x}}_{b}}=۴\Rightarrow\begin{cases}S=a+b=۴\\ p=a.b=۲\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}(x^{۲}+۸)}{x^{۲}\sqrt[۳]{x}-۲x\sqrt[۳]{x^{۲}}+۴x}=A\Rightarrow\frac{x^{۲}\sqrt[۳]{x}-۲x\sqrt[۳]{x^{۲}}+۴x}{\sqrt[۳]{x^{۲}}(x^{۲}+۸)}=\frac{۱}{A}\rightarrow\frac{x\sqrt[۳]{x^{۲}}\left(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲+\frac{۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\right)}{x\sqrt[۳]{x^{۲}}\left(x+\frac{۸}{x}\right)}=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲+\frac{۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}}{x+\frac{۸}{x}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{a^{۳}+b^{۳}}\right)(a^{۲}+b^{۲}-۲)=\frac{۱}{A}\Rightarrow\left(\frac{۱}{S^{۳}-۳pS}\right)(S^{۲}-۲p-۲)=\frac{۱}{A}\xrightarrow[P=۲]{S=۴}\frac{۱۶-۴-۲}{۶۴-۲۴}=\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{A}\rightarrow A=۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۵ ابتدا عبارت‌های رادیکالی را ساده کنیم:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۲}}=\sqrt{\frac{(۱+\sqrt{۳})^{۲}}{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۲}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

با جایگذاری این رادیکال‌ها داریم:

$$A=\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}}$$

$$=\frac{(۲+\sqrt{۳})\left(\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)+(۲-\sqrt{۳})\left(\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)}{\left(\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)\left(\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)}$$

$$=\frac{۳\sqrt{۲}}{\left(\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^{۲}-\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)^{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}+۲-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۳}=\sqrt{۲}$$

$$A=\sqrt{۲}\to A^{۳}=(\sqrt{۲})^{۳}=\sqrt{۸}$$

بنابراین ریشهٔ سوم عدد $\sqrt{۸}$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۶

$$\frac{۱}{a+\frac{۱}{a}}+\frac{۱}{a-\frac{۱}{a}}=۲a\to\frac{a}{a^{۲}+۱}+\frac{a}{a^{۲}-۱}=۲a$$

$$\to\frac{۲a^{۳}}{(a^{۲}+۱)(a^{۲}-۱)}=۲a\xrightarrow{\div ۲a}\frac{a^{۲}}{a^{۴}-۱}=۱\to a^{۴}-a^{۲}-۱=۰\to a^{۴}=a^{۲}+۱$$

حال عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[۳]{\frac{۱}{a^{۲}+a+۱}+\frac{۱}{a^{۲}-a+۱}}=\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}-a+۱+a^{۲}+a+۱}{(a^{۲}+۱+a)(a^{۲}+۱-a)}}=\sqrt[۳]{\frac{۲a^{۲}+۲}{a^{۴}+a^{۲}+۱}}=\sqrt[۳]{\frac{۲(a^{۲}+۱)}{a^{۲}+۱+a^{۲}+۱}}=\sqrt[۳]{\frac{۲(a^{۲}+۱)}{۲(a^{۲}+۱)}}=۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۷

$$A=\frac{2(x-3)+(x+3)}{(x+3)(x-3)}\times\frac{3(x^2-9)}{(x+3)(x-1)}$$

$$A=\frac{3\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}\times\frac{3\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-1)}}=\frac{9}{x+3}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{x+3}}{A}=\frac{\frac{3}{x+3}}{\frac{9}{x+3}}=\frac{3}{\cancel{x+3}}\times\frac{\cancel{x+3}}{9}=\frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۸

ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}(1+\sqrt{\sqrt[3]{4}})=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}(1+\sqrt[3]{2})=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\times\sqrt{(1+\sqrt[3]{2})^2}=\sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)(1+\sqrt[3]{2})^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}+1+2\sqrt[3]{2})}$$

$$=\sqrt{\cancel{\sqrt[3]{16}}+\cancel{\sqrt[3]{4}}+\underbrace{2\sqrt[3]{8}}_{4}-\cancel{\sqrt[3]{4}}-1-\cancel{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{3}\rightarrow\frac{12}{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}}+8=\frac{12}{\sqrt{3}}+8=4\sqrt{3}+8$$

$$4\sqrt{3}+8\xrightarrow{\text{ریشه دوم مثبت}}\sqrt{4\sqrt{3}+8}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\left|\sqrt{6}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۹

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^4\times b^2\times c}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{b^4\times c^2\times a}}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{c^4\times a^2\times b}}}$$

$$\sqrt[8]{a^4\times b^2\times c}\times\sqrt[8]{b^4\times c^2\times a}\times\sqrt[8]{c^4\times a^2\times b}$$

$$\sqrt[8]{a^7\times b^7\times c^7}=\sqrt[8]{(abc)^7}=\sqrt[8]{\left(2^{\frac{8}{7}}\right)^7}=\sqrt[8]{2^8}=2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۰

در صورت کسر همهٔ فرجه‌ها را یکسان می‌کنیم تا بتوانیم رادیکال‌ها را در هم ضرب کنیم بنابراین خواهیم داشت:

$$A=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3^5}\times\sqrt[5]{2^2}}{(6)^{\frac{11}{15}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{10}\times3^{25}\times2^{12}}}{(6)^{\frac{11}{15}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt[30]{2^{22}\times3^{22}\times3^{3}}}{(6)^{\frac{11}{15}}}\Rightarrow A\frac{\sqrt[30]{6^{22}}\times\sqrt[10]{3}}{(6)^{\frac{11}{15}}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{(6)^{\frac{11}{15}}\times(3)^{\frac{1}{10}}}{(6)^{\frac{11}{15}}}=(3)^{\frac{1}{10}}\Rightarrow\frac{1}{A^{10}+1}=\frac{1}{(3^{\frac{1}{10}})^{10}+1}=\frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۱ ابتدا سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[۴]{۲۸+۱۶\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۴+۲\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt[۴]{\left((۱+\sqrt{۳})^{۲}\right)^{۲}}=\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۳})^{۴}}=۱+\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

سپس سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم

$$۱+\sqrt[۳]{\sqrt{x\sqrt{x}}}=۱+\sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt{x^{۳}}}}=۱+\sqrt[۱۲]{x^{۳}}=۱+\sqrt[۴]{x} \qquad (۲)$$

با مساوی هم قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$۱+\sqrt{۳}=۱+\sqrt[۴]{x}\Rightarrow\sqrt{۳}=\sqrt[۴]{x}$$

طرفین رابطه بالا را به توان ۴ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{۳})^{۴}=x\Rightarrow x=۹$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۲ ابتدا عبارت صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{۷۵+۱۶\sqrt{۱۱}}-\sqrt{۷۵-۱۶\sqrt{۱۱}}=\sqrt{(۸+\sqrt{۱۱})^{۲}}-\sqrt{(۸-\sqrt{۱۱})^{۲}}=(۸+\sqrt{۱۱})-(۸-\sqrt{۱۱})=۲\sqrt{۱۱}$$

حال عبارت مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$B=\sqrt{۶-\sqrt{۱۱}}+\sqrt{۶+\sqrt{۱۱}}\Rightarrow B^{۲}=۶-\sqrt{۱۱}+۶+\sqrt{۱۱}+۲\sqrt{(۶-\sqrt{۱۱})(۶+\sqrt{۱۱})}$$

$$\Rightarrow B^{۲}=۱۲+۲\sqrt{\underbrace{۳۶-۱۱}_{۲۵}}=۱۲+۲(۵)=۲۲\Rightarrow B=\sqrt{۲۲}$$

بنابراین حاصل کسر خواسته شده برابر است با:

$$\frac{A}{B}=\frac{۲\sqrt{۱۱}}{\sqrt{۲۲}}=\frac{۲\sqrt{۱۱}}{\sqrt{۲}\sqrt{۱۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۳ می‌دانیم $۱۴-۶\sqrt{۵}=(۳-\sqrt{۵})^{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۱}{۳-\sqrt{۵}}$ است.

پس $a=\sqrt[۴]{۱۴-۶\sqrt{۵}}=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}$ می‌باشد. حال داریم:

$$\left(a+\frac{۲}{a}+۲\right)^{۲}\left(a+\frac{۲}{a}-۲\right)^{۲}=\left(\left(a+\frac{۲}{a}\right)^{۲}-۴\right)^{۲}=\left(a^{۲}+\frac{۴}{a^{۲}}+۴-۴\right)^{۲}=\left(۳-\sqrt{۵}+\frac{۴}{۳-\sqrt{۵}}\right)^{۲}$$

$$=(۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵})^{۲}=۶^{۲}=۳۶$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴ می‌دانیم $۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}$ است، پس:

$$A=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۱}\times(۵+۲\sqrt{۶})^{\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۱}\times(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}-۱}=(۳-۲)^{\sqrt{۳}-۱}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{۵+A+۴\sqrt{A+۱}}}=\frac{۲}{\sqrt{۶+۴\sqrt{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{(۲+\sqrt{۲})^{۲}}}=\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{۲(۲-\sqrt{۲})}{۴-۲}=۲-\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۵ مخرج کسرهای داده شده را به کمک اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله‌ای، گویا می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)}{۳-۱}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}{۳-۲}=\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}$$

اکنون حاصل عبارت را به دست می‌آوریم:

$$A=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۳}-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}-\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱-\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۹}+۱$$

$$\Rightarrow\sqrt{A+۲\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۹}+۱+۲\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt{(\sqrt[۳]{۳}+۱)^۲}=\sqrt[۳]{۳}+۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۶ **نکته:** اگر $a>۰$، آنگاه: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

نکته: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt[۳]{۴}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲^۳\times۴\sqrt[۳]{۴}}}=\sqrt[۱۲]{۲^۵\sqrt[۳]{۴}}=\sqrt[۱۲]{\sqrt[۳]{۲^{۱۵}\times۲^۲}}=\sqrt[۳۶]{۲^{۱۷}}=۲^{\frac{۱۷}{۳۶}}$$

طبق فرض این مقدار برابر ۸^a است، پس:

$$۲^{\frac{۱۷}{۳۶}}=۸^a\Rightarrow ۲^{\frac{۱۷}{۳۶}}=۲^{۳a}\Rightarrow ۳a=\frac{۱۷}{۳۶}\Rightarrow a=\frac{۱۷}{۱۰۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۷ **نکته:**

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & n\in\mathbb{N}\ \text{و زوج}\\ a & n\in\mathbb{N}\ \text{و فرد}\end{cases}$$

عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\sqrt{(۳-۲\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{(۱+۲\sqrt{۲})^۲}}\Rightarrow A=\sqrt{|۳-۲\sqrt{۲}|+|۱+۲\sqrt{۲}|}\Rightarrow A=\sqrt{\underbrace{|۳-۲\sqrt{۲}|}_{(+)}+\underbrace{|۱+۲\sqrt{۲}|}_{(+)}}=\sqrt{۴}\Rightarrow A=۲$$

درنتیجه:

$$\frac{A}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

بنابراین مقدار A، $\sqrt{۲}$ برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۸

نکته: اگر $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

نکته: اگر r و s دو عدد گویا باشند و a عددی مثبت، داریم: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

نکته: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

با توجه به نکات، سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt{2} = \sqrt[3]{2 \times \sqrt[4]{2^3}} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{2 \times 2^{\frac{3}{4}}} \times 2^{-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{2^{1+\frac{3}{4}}} \times 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[3]{2^{\frac{7}{4}}} \times 2^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{7}{4}\times\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{3}{10}} = 2^{\frac{7}{12}+\frac{3}{10}}$$
$$= 2^{\frac{35+18}{60}} = 2^{\frac{53}{60}} = \sqrt[60]{2^{53}} \Rightarrow n = 60 \,,\; m = 53 \Rightarrow n + m = 113$$

توجه: دقت کنید چون کمترین مقدار $m+n$ را می‌خواستیم، باید کمترین مقدار m و n را که مقسوم‌علیه مشترکی جز ۱ نداشته باشد، در نظر بگیریم وگرنه هر مضربی از ۱۱۳ هم جواب خواهد بود.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۹

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$$
$$= (a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2) = (a^2+b^2)((a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 - a^2b^2)$$
$$= (1)((1) - 3a^2b^2) = 1 - 3a^2b^2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰

$$7 - 4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$
$$9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5}-2)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$$

پس مخرج می‌شود $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ و داریم:

$$\frac{\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \sqrt{5^2} + \sqrt{3^2} + \sqrt{5} \times \sqrt{3} = 8 + \sqrt{15}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱

با یکسان کردن فرجه‌های دو رادیکال داریم:

$$A = \sqrt[6]{4-\sqrt{12}} \times \sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2} \Rightarrow A = \sqrt[6]{4-\sqrt{12}} \times \sqrt[6]{1+2\sqrt{3}+3}$$
$$\Rightarrow A = \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \times \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\underbrace{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}_{\text{مزدوج}}} \Rightarrow A = \sqrt[6]{16-12} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۲

عبارت زیر دو رادیکال سمت چپ مربع کامل هستند؛ پس:

$$A = \sqrt{11+4\sqrt{6}} + \sqrt{11-4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} - \sqrt[3]{\sqrt{8}} = |\sqrt{3}+2\sqrt{2}| + |\sqrt{3}-2\sqrt{2}| - \sqrt[3]{\sqrt{8}}$$
$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

از آنجا که $A = 3\sqrt{2}$، پس $A^2 = 18$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۳ عبارت داده‌شده را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$a^{۳} > \sqrt[۳]{a} \Rightarrow a^{۳} - \sqrt[۳]{a} > ۰ \Rightarrow \left|a^{۳} - \sqrt[۳]{a}\right| = a^{۳} - \sqrt[۳]{a}$$

$$\sqrt[۳]{a} < a \Rightarrow \sqrt[۳]{a} - a < ۰ \Rightarrow \left|\sqrt[۳]{a} - a\right| = -\sqrt[۳]{a} + a$$

$$a < a^{۳} \Rightarrow a - a^{۳} < ۰ \Rightarrow \left|a - a^{۳}\right| = -a + a^{۳}$$

بنابراین:

$$M = (a^{۳} - \sqrt[۳]{a}) + A(-\sqrt[۳]{a} + a) + B(-a + a^{۳}) = a^{۳} - \sqrt[۳]{a} - A\sqrt[۳]{a} + Aa - Ba + Ba^{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow a^{۳}(۱ + B) - \sqrt[۳]{a}(۱ + A) + a(A - B) = ۰ \Rightarrow A = -۱ \ , \ B = -۱ \Rightarrow A + B = -۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۴ با فرض $B = \dfrac{۲ + \sqrt{۶}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}$ و $C = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}} - \sqrt{۲ + \sqrt{۳}}$، حاصل B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$B = \frac{۲ + \sqrt{۶}}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}} = \sqrt{۲}$$

$$C = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}} - \sqrt{۲ + \sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} C^{۲} = (\sqrt{۲ - \sqrt{۳}})^{۲} - ۲\sqrt{(۲ - \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳})} + (\sqrt{۲ + \sqrt{۳}})^{۲}$$

$$\Rightarrow C^{۲} = ۲ - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۴ - ۳} + ۲ + \sqrt{۳} = ۲ \xrightarrow{C<۰} C = -\sqrt{۲}$$

حال داریم:

$$A = BC \Rightarrow A = (\sqrt{۲})(-\sqrt{۲}) = -۲ \Rightarrow A + \frac{۲}{A} = -۲ - ۱ = -۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۵ ابتدا داریم:

$$A = (\alpha^{۲} + \beta^{۲} + ۲\alpha\beta)(\alpha^{۲} + \beta^{۲} - ۲\alpha\beta) = (\alpha + \beta)^{۲}(\alpha - \beta)^{۲} = ((\alpha + \beta)(\alpha - \beta))^{۲} = (\alpha^{۲} - \beta^{۲})^{۲} \Rightarrow A = \alpha^{۴} + \beta^{۴} - ۲\alpha^{۲}\beta^{۲}$$

اکنون حاصل A را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha = \sqrt[۴]{\sqrt{۱۸} - ۴} \Rightarrow \alpha^{۴} = \sqrt{۱۸} - ۴$$

$$\beta = \sqrt[۴]{\sqrt{۱۸} + ۴} \Rightarrow \beta^{۴} = \sqrt{۱۸} + ۴$$

$$\alpha\beta = \sqrt[۴]{\sqrt{۱۸} - ۴} \times \sqrt[۴]{\sqrt{۱۸} + ۴} = \sqrt[۴]{\underbrace{(\sqrt{۱۸} - ۴)(\sqrt{۱۸} + ۴)}_{\text{مزدوج}}} = \sqrt[۴]{۱۸ - ۱۶} = \sqrt[۴]{۲}$$

بنابراین:

$$A = \sqrt{۱۸} - ۴ + \sqrt{۱۸} + ۴ - ۲(\sqrt[۴]{۲})^{۲} = ۲\sqrt{۱۸} - ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow [A] = [۴\sqrt{۲}] = ۵$$

دقت کنید: $۵ < ۴\sqrt{۲} \simeq ۴ \times ۱/۴۱ < ۶$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۶

نکتهٔ ۱: ریشهٔ پنجم هر عددی مانند a، برابر با $\sqrt[5]{a}$ است.

نکتهٔ ۲: اگر $a>0$ ، m ، n اعداد طبیعی باشند، داریم: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

ریشهٔ پنجم عدد $8\sqrt[3]{4}$ را x در نظر می‌گیریم:

$$x=\sqrt[5]{8\sqrt[3]{4}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{8^3\times 4}}=\sqrt[15]{(2^3)^3\times 2^2}=\sqrt[15]{2^{11}}=2^{\frac{11}{15}}$$

حال، مقدار A را از رابطهٔ $x\sqrt[3]{A}=4\sqrt[15]{8^{11}}$ به‌دست می‌آوریم:

$$x\sqrt[3]{A}=4\sqrt[15]{8^{11}} \Rightarrow 2^{\frac{11}{15}}\times\sqrt[3]{A}=2^2\times 8^{\frac{11}{15}} \Rightarrow 2^{\frac{11}{15}}\times\sqrt[3]{A}=2^2\times(2^3)^{\frac{11}{15}} \Rightarrow \sqrt[3]{A}=\frac{2^2\times 2^{\frac{11}{5}}}{2^{\frac{11}{15}}}=2^{2+\frac{11}{5}-\frac{11}{15}} \Rightarrow \sqrt[3]{A}=2^{\frac{30+33-11}{15}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{A}=2^{\frac{52}{15}} \Rightarrow A=(2^{\frac{52}{15}})^3=2^{\frac{52}{5}}=\sqrt[5]{2^{52}}=\sqrt[5]{2^{50}\times 2^2} \Rightarrow A=2^{10}\times\sqrt[5]{2^2} \Rightarrow A=2^{10}\times\sqrt[5]{4}=1024\sqrt[5]{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۷

نکتهٔ ۱: $\sqrt[n]{a^m b^k}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{k}{n}}$

نکتهٔ ۲: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

نکتهٔ ۳: $a^m\times a^n=a^{m+n}$

$$A=\sqrt[6]{12}\times\sqrt[4]{54}\times\sqrt[3]{a\sqrt[4]{6}}=(2^{\frac{2}{6}}\times 3^{\frac{1}{6}})\times(3^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}})\times(a^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{12}}\times 3^{\frac{1}{12}})$$

$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}\times 3^{\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{8}{12}}\times 3^{\frac{12}{12}}\times a^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 3\times a^{\frac{1}{3}}$$

طبق فرض این مقدار برابر ۶ است؛ پس:

$$2^{\frac{2}{3}}\times 3\times a^{\frac{1}{3}}=6 \Rightarrow 2^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=2 \Rightarrow a^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a=2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۸

نکتهٔ ۱: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

نکتهٔ ۲: $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

سعی می‌کنیم مخرج کسر را گویا کرده و آن را ساده کنیم:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}\times\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{(\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}-1})^2}{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1-2\sqrt{2-1}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۹ **نکته: اگر رادیکال‌ها بامعنی باشند داریم:**

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^m} \quad , \quad \sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

همهٔ رادیکال‌ها را در ریشهٔ ۶ می‌نویسیم:

$$\sqrt[6]{6+2\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\times\sqrt[3]{16} = \sqrt[6]{6+2\sqrt{5}}\times\sqrt[6]{(\sqrt{5}-1)^2}\times\sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{6+2\sqrt{5}}\times\sqrt[6]{5+1-2\sqrt{5}}\times\sqrt[6]{16^2}$$

$$= \sqrt[6]{(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}\times\sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{36-20}\times\sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{16}\times\sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{16^3} = \sqrt{16} = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** تلاش می‌کنیم تا عبارت A را به صورت یک مربع کامل درآوریم:

$$16+8\sqrt{3} = 4+12+2\times2\times2\sqrt{3} = (2+2\sqrt{3})^2$$

گام دوم: ریشه‌های دوم A را محاسبه کرده و آن‌ها را α و β می‌نامیم. بدیهی است که $|\alpha|$ و $|\beta|$ برابر یکدیگرند: ریشهٔ مثبت: $\alpha = 2+2\sqrt{3}$

ریشهٔ منفی: $\beta = -2-2\sqrt{3}$

گام سوم: حاصل عبارت صورت سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$|\alpha|+|\beta|-\frac{A}{2} = (2+2\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})-(8+4\sqrt{3}) = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا فرجه‌های دو رادیکال را یکسان می‌کنیم:

$$\sqrt[4]{B}\times\sqrt{A} = \sqrt[4]{B}\times\sqrt[4]{A^2} = \sqrt[4]{BA^2}$$

گام دوم: عبارت A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = (\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}})^2 = 13-\sqrt{7}+5-\sqrt{7}-2\sqrt{(13-\sqrt{7})(5-\sqrt{7})}$$

$$= 18-2\sqrt{7}-2\sqrt{65-13\sqrt{7}-5\sqrt{7}+7}$$

$$= 18-2\sqrt{7}-2\sqrt{72-18\sqrt{7}} = 18-2\sqrt{7}-6\sqrt{8-2\sqrt{7}}$$

گام سوم: عبارت $8-2\sqrt{7}$ را به صورت مربع کامل نوشته و جذر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$8-2\sqrt{7} = 7+1-2\sqrt{7} = (\sqrt{7}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{8-2\sqrt{7}} = |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}-1$$

گام چهارم: با جای‌گذاری مقدار A^2، عبارت $\sqrt[4]{BA^2}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = 18-2\sqrt{7}-6(\sqrt{7}-1) = 18-2\sqrt{7}-6\sqrt{7}+6$$

$$= 24-8\sqrt{7} = 8(3-\sqrt{7})$$

$$\sqrt[4]{BA^2} = \sqrt[4]{8(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \sqrt[4]{8(9-7)} = \sqrt[4]{16} = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۲ پاسخ تشریحی **گام اول**: در تساوی داده‌شده، همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف منتقل می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-۳۶}=۳ \Rightarrow \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-۳۶}-۳=۰$$

گام دوم: با توجه به این‌که مجموع سه عبارت برابر صفر است، از نکتهٔ موجود در درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$A=\sqrt[3]{x}\ ,\ B=-\sqrt[3]{x-۳۶}\ ,\ C=-۳$$

$$(\sqrt[3]{x})^{۳}+(-\sqrt[3]{x-۳۶})^{۳}+(-۳)^{۳}=۳(\sqrt[3]{x})(-\sqrt[3]{x-۳۶})(-۳)$$

$$\Rightarrow x-x+۳۶-۲۷=۹\sqrt[3]{x^{۲}-۳۶x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^{۲}-۳۶x}=۱$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۳}} x^{۲}-۳۶x=۱$$

گام سوم: با تقسیم طرفین رابطهٔ به‌دست‌آمده بر x، عبارت خواسته‌شده در صورت سؤال را ایجاد می‌کنیم:

$$x^{۲}-۳۶x=۱ \xrightarrow{\div x} x-۳۶=\frac{۱}{x} \Rightarrow x-\frac{۱}{x}=۳۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳ پاسخ تشریحی **گام اول**: همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف معادله منتقل کرده و سپس معادله را به روش Δ یا مربع کامل حل می‌کنیم:

$$(x+۱)(x+۳)=۲ \Rightarrow x^{۲}+۴x+۳=۲$$

روش مربع کامل: $x^{۲}+۴x+۴=۳ \Rightarrow (x+۲)^{۲}=۳$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱}+۲=\sqrt{۳} \Rightarrow x_{۱}=-۲+\sqrt{۳}=a \\ x_{۲}+۲=-\sqrt{۳} \Rightarrow x_{۲}=-۲-\sqrt{۳}=b \end{cases}$$

روش Δ: $x^{۲}+۴x+۱=۰$

$$\Delta=۴^{۲}-۴(۱)=۱۲$$

$$x_{۱},x_{۲}=\frac{-۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=-۲+\sqrt{۳}=a \\ x_{۲}=-۲-\sqrt{۳}=b \end{cases}$$

گام دوم: مقادیر a و b را در عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}-۷=\frac{-۲+\sqrt{۳}}{-۲-\sqrt{۳}}-۷=\frac{-۲+\sqrt{۳}}{-۲-\sqrt{۳}}\times\frac{-۲+\sqrt{۳}}{-۲+\sqrt{۳}}-۷$$

$$=\frac{(-۲+\sqrt{۳})^{۲}}{۴-۳}-۷=(۴+۳-۴\sqrt{۳})-۷=-۴\sqrt{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا مخرج a را گویا می‌کنیم و طبق درس‌نامه (خیلی شبیه مثال درس‌نامه)، صورت و مخرج آن را در عبارت لاغرِ آن یعنی $\sqrt[۳]{۲}-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$a=\frac{۱}{(\sqrt[۳]{۲})^{۲}+(+۱)(\sqrt[۳]{۲})+(+۱)^{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۲}-۱$$

گام دوم: عبارت $\frac{۱}{۳}a^{۳}+a^{۲}+a$ خیلی شبیه $(a+۱)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}+۳a+۱$ است، پس آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۳}a^{۳}+a^{۲}+a=\frac{۱}{۳}(a^{۳}+۳a^{۲}+۳a+۱-۱)=\frac{۱}{۳}((a+۱)^{۳}-۱)$$

گام سوم: حالا $a=\sqrt[۳]{۲}-۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۳}((\sqrt[۳]{۲}-۱+۱)^{۳}-۱)=\frac{۱}{۳}(۲-۱)=\frac{۱}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا با مخرج‌مشترک‌گیری، عبارت $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\xrightarrow{abc=-۵}\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=-\frac{۱}{۵}(ab+ac+bc)$$

گام دوم: پس فقط به $ab+ac+bc$ نیاز داریم. این عبارت هم در دلِ اتحاد مربع سه‌جمله‌ای قرار دارد. پس عبارت $a+b+c$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\underbrace{a+b+c}_{۷})^{۲}=\underbrace{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}_{۳۱}+۲(ab+ac+bc)\Rightarrow ab+ac+bc=\frac{۴۹-۳۱}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

گام سوم: حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=-\frac{۱}{۵}(۹)=-\frac{۹}{۵}=-۱/۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۶ **گام اول:** x بین صفر و یک است و مربعش از خودش کوچک‌تر است. از طرفی، مربع x نمی‌تواند منفی باشد، در نتیجه مربع x برابر b است و داریم:

$$x^{۲}=b \quad (۱)$$

گام دوم: می‌دانیم که ریشه‌های دوم x به صورت $\sqrt{x}$ و $-\sqrt{x}$ هستند؛ پس a که منفی است برابر $-\sqrt{x}$ و c که مثبت است برابر $\sqrt{x}$ است:

$$\sqrt{x}=c\ ,\ -\sqrt{x}=a \qquad (۲)$$

گام سوم: رابطه‌های (۱) و (۲) را در تساوی داده‌شده در سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{b}{ac^{۲}}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{x^{۲}}{-\sqrt{x}(\sqrt{x})^{۲}}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۱}{۸}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x=\frac{۱}{۶۴}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $\sqrt[۳]{x}$ است که برابر می‌شود با:

$$\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۶۴}}=\frac{۱}{۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۷ **گام اول:** با توجه به خواص رادیکال و توان‌های گویا، A را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\frac{\overbrace{\sqrt{۸\sqrt[۳]{A}}}^{\sqrt{۸}\times\sqrt{\sqrt[۳]{A}}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\underbrace{\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}_{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}}}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۸}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۶]{۲}\times ۸^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۲^۳}\times\sqrt[۶]{A}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt[۳]{۲^۲}\times\sqrt[۶]{۲}\times(۲^۳)^{-\frac{۲}{۳}}}\Rightarrow A=\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}\times A^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۱}{۶}}\times ۲^{-۲}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}$$

گام دوم: در تساوی به‌دست‌آمده $A^{\frac{۱}{۶}}$ را به مخرج سمت چپ می‌بریم:

$$A=\frac{۲^{۱}\times A^{\frac{۱}{۶}}}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow\frac{A}{A^{\frac{۱}{۶}}}=\frac{۲}{۲^{-\frac{۷}{۶}}}\Rightarrow A^{۱-\frac{۱}{۶}}=۲^{۱-(-\frac{۷}{۶})}\Rightarrow A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\qquad(*)$$

گام سوم: دو طرف رابطهٔ $(*)$ را به توان ۶ می‌رسانیم تا خواستهٔ سؤال به دست آید:

$$A^{\frac{۵}{۶}}=۲^{\frac{۱۳}{۶}}\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}}(A^{\frac{۵}{۶}})^۶=(۲^{\frac{۱۳}{۶}})^۶\Rightarrow A^۵=۲^{۱۳}$$

پس گزینهٔ (۴) پاسخ سؤال است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۸ **گام اول:** تساوی $a+\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴$ را به صورت $\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴-a$ می‌نویسیم، حال این تساوی را به همراه تساوی دیگری که داده‌شده، زیر هم می‌نویسیم و دو طرف آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳}=۴\\ \sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳}=۴-a\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{دو طرف ضرب در یکدیگر}}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳})=۱۶-۴a$$

گام دوم: در سمت چپ تساوی به‌دست‌آمده، همه چیز برای استفاده از اتحاد مزدوج آماده است:

$$\overbrace{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۳})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-۳})}^{\text{اتحاد مزدوج}}=۱۶-۴a$$

$$\Rightarrow(x-a-(x-۳))=۱۶-۴a\Rightarrow\cancel{x}-a-\cancel{x}+۳=۱۶-۴a\Rightarrow ۳a=۱۳\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۹ **گام اول:** عبارت $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳$ را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۳=(\sqrt{۳})^۳-(\sqrt{۲})^۳-۳\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}-۹\sqrt{۲}+۶\sqrt{۳}=۹\sqrt{۳}-۱۱\sqrt{۲}$$

گام دوم: مقدار به‌دست‌آمده را در عبارت صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم و مقادیر A و B را به دست می‌آوریم:

$$۹\sqrt{۳}-۱۱\sqrt{۲}=A\sqrt{۳}-B\sqrt{۲}\Rightarrow\begin{cases}A=۹\\ B=۱۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{B}{A}=\frac{۱۱}{۹}=۱\frac{۲}{۹}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۰ **گام اول:** فرض کنید $b^4 = 28 - 16\sqrt{3}$. سعی می‌کنیم تا عدد $28 - 16\sqrt{3}$ را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$28 - 16\sqrt{3} = 4(7 - 4\sqrt{3}) = 4(4 + 3 - 4\sqrt{3}) = 4(2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\times 2\times\sqrt{3}) = 2^2(2 - \sqrt{3})^2 = (4 - 2\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow b^4 = (4 - 2\sqrt{3})^2 \xrightarrow{\text{جذر}} b^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

گام دوم: این بار سعی می‌کنیم عدد $4 - 2\sqrt{3}$ را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$4 - 2\sqrt{3} = 3 + 1 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2\times\sqrt{3}\times 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$b^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} b = \pm(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \sqrt{3} - 1 \\ b_2 = -(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

گام سوم: اختلاف ریشه‌های چهارم برابر است با:

$$|b_1 - b_2| = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} - 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۱ **گام اول:** عبارت‌های $8 + 3\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3} - 8$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$8 + 3\sqrt{3} = 2^3 + (\sqrt{3})^3 = (2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3} + 3) = (2 + \sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3})$$

$$3\sqrt{3} - 8 = (\sqrt{3})^3 - 2^3 = (\sqrt{3} - 2)(3 + 2\sqrt{3} + 4) = (\sqrt{3} - 2)(7 + 2\sqrt{3})$$

گام دوم: حال عبارت‌های به‌دست‌آمده را در A جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3} - 8}{7 + 2\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{\cancel{(2 + \sqrt{3})}(7 - 2\sqrt{3})}{\cancel{2 + \sqrt{3}}} + \frac{(\sqrt{3} - 2)\cancel{(7 + 2\sqrt{3})}}{\cancel{7 + 2\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow A = 7 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 = 5 - \sqrt{3}$$

گام سوم: با توجه به این‌که A را به دست آوردیم، خواستهٔ سؤال که $A + \sqrt{3}$ است را به دست می‌آوریم:

$$A + \sqrt{3} = 5 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} = 5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۲ **گام اول:** مخرج هر کدام از کسرهایی که داریم را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\frac{1/5}{\sqrt[3]{2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$$

گام دوم: پس حاصل عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} + 1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۴۳

با جای‌گذاری مقدار a در عبارت دوم، b را به دست می‌آوریم:

$$(2^{\sqrt{2}-1})^b = 2^{\sqrt{2}+1} \Rightarrow 2^{b(\sqrt{2}-1)} = 2^{\sqrt{2}+1} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۴

ابتدا A را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{2^6 \times (3^3 \times 2 \times 5)^{\frac{1}{2}}}{3(3^2 \times 5^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^6 \times 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}}{3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{13}{2}}$$

پس ریشه سیزدهم $2^{\frac{13}{2}}$ برابر است با $\sqrt[13]{2^{\frac{13}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر عبارت x^3+y^3 را تجزیه می‌کنیم.

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy) = (x+y)((x+y)^2-3xy)$$

برای پیدا کردن xy کافی است تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2y + y^2x + 2xy\sqrt{xy} = 5$$

$$\Rightarrow xy(x+y) + 2xy\sqrt{xy} = 5 \xrightarrow[x+y=3]{\sqrt{xy}=T} 2T^3 + 3T^2 - 5 = 0 \Rightarrow (T-1)\underbrace{(2T^2+5T+5)}_{\Delta<0} = 0 \Rightarrow T=1 \Rightarrow xy=1$$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 27-9 = 18$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶

با ساده سازی رادیکال‌های داده شده داریم:

$$\sqrt{\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}+1} = \sqrt{(\sqrt[4]{3}+1)^2} = \sqrt[4]{3}+1$$

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} = \sqrt{3}+1$$

پس داریم:

$$\underbrace{(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt[4]{3}+1)}_{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}+1) = 3-1 = 2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۷

$$(3-2\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = ((\sqrt{2}-1)^2)^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}-1)^{-1} \qquad \underline{\underline{\sqrt{6}}} - 1 - \underline{\underline{\sqrt{2}}} + \sqrt{3} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) + \sqrt{3} - 1 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{(3-2\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}-1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^{-1}}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)\underbrace{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3}-1)(2-1)} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۸

$$b = 7-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}+3 = (2-\sqrt{3})^2 \qquad \frac{a^6b^2+a^4b^3}{a+\sqrt{b}} = \frac{a^4b^2(a^2+b)}{a+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{3}+2)^4(\sqrt{3}-2)^4((\sqrt{3}+2)^2+(\sqrt{3}-2)^2)}{(\sqrt{3}+2)+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}$$

$$= \frac{(3-4)^4(3+4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹ فرض کنید $a=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$؛ با استفاده از اتحاد $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ داریم:

$$x=a+b\Rightarrow x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=2\sqrt{2}+3x\ \Rightarrow x^3-3x=2\sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۰

$$\sqrt[3]{\frac{-\sqrt[6]{4}}{\sqrt[5]{-2}}}=\sqrt[3]{\frac{-\sqrt[6]{2^2}}{-\sqrt[5]{2}}}=\sqrt[3]{\frac{2^{\frac{2}{6}}}{(2)^{\frac{1}{5}}}}=\sqrt[3]{2^{(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})}}=\sqrt[3]{2^{\frac{2}{15}}}=2^{\frac{2}{45}}\quad (0/5)^{-3}=(\frac{1}{2})^{-3}=2^3\Rightarrow A=2^{\frac{2}{45}}\times 2^3=2^{(\frac{2}{45}+3)}=2^{\frac{137}{45}}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$((\sqrt{3}+1)+\sqrt{3})((\sqrt{3}+1)^2+3)((\sqrt{3}+1)^4+9)$$

آن را در مزدوج قسمت اول ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{((\sqrt{3}+1)-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}}((\sqrt{3}+1)+\sqrt{3})((\sqrt{3}+1)^2+3)((\sqrt{3}+1)^4+9)$$

دو عبارت اول سمت چپ (در صورت) تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و این اتفاق تا قسمت آخر ادامه پیدا می‌کند.

$$=((\sqrt{3}+1)^2-3)((\sqrt{3}+1)^2+3)((\sqrt{3}+1)^4+9)\ =((\sqrt{3}+1)^4-9)((\sqrt{3}+1)^4+9)=(\sqrt{3}+1)^8-81$$

با اضافه کردن ۸۱ واحد، حاصل نهایی برابر $(\sqrt{3}+1)^8$ می‌شود.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲ عبارت را x می‌نامیم، داریم:

$$x^2=8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ +2\sqrt{(8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}})(8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}})}\ =16+2\sqrt{64-4(10+2\sqrt{5})}$$

$$=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+2\sqrt{4\underbrace{(6-2\sqrt{5})}_{(\sqrt{5}-1)^2}}=16+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=16+4(\sqrt{5}-1)\ =12+4\sqrt{5}=2(6+2\sqrt{5})=2(\sqrt{5}+1)^2$$

پس داریم:

$$x^2=2(\sqrt{5}+1)^2\ \xrightarrow[\text{ریشهٔ دوم می‌گیریم}]{x>0}x=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳ به نظر می‌رسد فاکتورگیری در کسر اول کارساز است.

$$\frac{\sqrt[10]{3}(\sqrt[10]{9}-1)}{\sqrt[10]{3}(\sqrt[10]{3}-1)}=\frac{(\sqrt[10]{3})^2-1}{\sqrt[10]{3}-1}=\frac{\cancel{(\sqrt[10]{3}-1)}(\sqrt[10]{3}+1)}{\cancel{\sqrt[10]{3}-1}}\ =\sqrt[10]{3}+1\quad (I)$$

برای کسر دوم از روش مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(1-\sqrt[10]{3})(1+\sqrt[10]{3})}{1+\sqrt[10]{3}}=1-\sqrt[10]{3}\ \ (II)\ \ (I+II)\Rightarrow\sqrt[10]{3}+1+1-\sqrt[10]{3}=2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴

نکته ۱: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

نکته ۲: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

با توجه به اینکه $(3)^3 - (2\;\;2)^3 = 27 - 16\;\;2$، به‌کمک اتحادها داریم:

$$(3)^3 - (2\sqrt{2})^3 = (3 - 2\sqrt{2})(9 + 8 + 6\sqrt{2})$$

حال حاصل مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$(1-\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} \times \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}$$

$$A = \frac{(3-2\sqrt{2})(17+6\sqrt{2})}{17+6\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1)^2 \Rightarrow A = (3-2\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} - (3+2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۵

نکته: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ابتدا $(a-b)^2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a - b = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$(a-b)^2 = (4 - 2\sqrt{3}) + (4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \times \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$(a-b)^2 = 8 - 2\sqrt{16 - (2\sqrt{3})^2} = 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4$$

بنابراین:

$$(a-b)^4 = ((a-b)^2)^2 = 4^2 = 16$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۶

از ضرب عبارت‌های $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-3}$ و $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-3}$ اتحاد مزدوج ایجاد می‌شود:

$$(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-3}) \times (\sqrt{x+a} + \sqrt{x-3}) = (x+a) - (x-3) = a + 3$$

با توجه به اینکه $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-3} = 5$ است، پس با جای‌گذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$\underbrace{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-3})}_{5} \times (\sqrt{x+a} + \sqrt{x-3}) = a + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-3} = \frac{a+3}{5}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow \sqrt{x+a} + \sqrt{x-3} - 1 = \frac{a+3}{5} - 1 = \frac{a-2}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۷ ابتدا عبارت $\sqrt{x-2a}$ را تنها می‌کنیم و طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x-2a}=a-\sqrt{x+a}\Rightarrow x-2a=a^2+x+a-2a\sqrt{x+a}$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{x+a}=a^2+3a\xrightarrow{\div a}2\sqrt{x+a}=a+3\Rightarrow 4(x+a)=a^2+6a+9\Rightarrow x=\frac{(a+1)^2}{4}+2$$

اکنون به بررســـی جواب $x=(\frac{a+1}{2})^2+2$ می‌پردازیم. طبق صورت ســـؤال، a و x عددی صحیح است، به این منظور $\frac{a+1}{2}$ باید عددی صحیح باشد، پس a عددی فرد است.

با بررسی مقادیر مختلف a، جواب‌های قابل قبول برای x را به دست می‌آوریم:

$a=1\Rightarrow x=3$ ✗ غیرقابل قبول (صدق نمی‌کند)

$a=3\Rightarrow x=6$ ✓ $a=5\Rightarrow x=11$ ✓ $a=7\Rightarrow x=18$ ✓ $a=9\Rightarrow x=27$ ✓

بنابراین ۴ جواب قابل قبول برای a وجود دارد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۸ ابتدا کسر $\frac{15}{2\sqrt[3]{2}-1}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{15}{2\sqrt[3]{2}-1}\times\frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}=\frac{15(4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)}{16-1}=4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین:

$$A=4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1-4\sqrt[3]{4}-1=2\sqrt[3]{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۵۹ می‌دانیم:

$$\sqrt[5]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{2\times 2^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[5]{4\times 2^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[5]{2^2\times 2^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}}=2^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین:

$$P=2^{\frac{1}{2}}\times 4^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۰ ابتدا عبارت $(x^2+12)(x-6)$ را به صورت مکعب کامل می‌نویسیم:

$$A=(x^2+12)(x-6)=x^3-6x^2+12x-72=(x-2)^3-64$$

اگر $x=\sqrt[3]{65}+2$ باشد، خواهیم داشت:

$$A=(\sqrt[3]{65}+2-2)^3-64=65-64=1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۱ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}}=\frac{\left(x^{3+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(x^{4+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{2+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(x^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{7}{8}+\frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{6}}}=x^{\frac{7}{8}+\frac{3}{2}-\frac{7}{6}}=x^{\frac{29}{24}}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲ در عبارت $\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$، حاصل بخش اول $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$ است. پس بایـد جـواب قسـمت دوم حتماً $k-\sqrt{2}$ شود تا $\sqrt{2}$ها با هم بروند و جواب بشود $k-1$.

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}=k-\sqrt{2}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}a+b\sqrt{2}=(k-\sqrt{2})^3=k^3-3\sqrt{2}k^2+6k-2\sqrt{2}$$
$$=(k^3+6k)-(3k^2+2)\sqrt{2}$$

پس داریم:

$$b=-3k^2-2\ ,\ a=k^3+6k$$

بنابراین $16-b=3k^2+18$ و نسبت $\frac{a}{16-b}$ می‌شود $\frac{k^3+6k}{3k^2+18}$ یعنی $\frac{k}{3}$ کـه یـک سـوم عـدد طبیعـی اسـت و در گزینه‌ها فقط $\frac{7}{3}$ امکان دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۳ چون $(\sqrt{5}-2)\times(\sqrt{5}+2)=1$ پس دو عبارت $\sqrt{5}+2$ و $\sqrt{5}-2$ معکوس هم هستند.

$$\sqrt{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}+6}=\sqrt{|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}+2|+6}=\sqrt{\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2+6}$$
$$=\sqrt{2\sqrt{5}+6}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=(\sqrt{5}+1)=\sqrt{5}+1$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ $\sqrt{8}$ و $3\sqrt{3}$ در واقع $\sqrt{2}^3$ و $\sqrt{3}^3$ هستند و به فکر اتحاد چاق و لاغر می‌افتیم:

$$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{8}}{5+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}^3-\sqrt{2}^3}{5+\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}\sqrt{2})}{5+\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

جواب $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ می‌شود $\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$ یعنی $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

پس خواسته سؤال $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ است. یعنی $3-2=1$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵ گزینه ۳ درست است.

برای محاسبهٔ رادیکال‌های صورت کسر A داریم:

$$\begin{cases}\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\\ \sqrt{۴/۵}=\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\\ \sqrt{۱۲/۵}=\sqrt{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\end{cases}$$

$$\text{صورت کسر A}=۲\sqrt{۲}+\frac{۳}{\sqrt{۲}}-\frac{۵}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}-\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۲}$$

برای محاسبهٔ مخرج کسر A، (که قطعاً عددی منفی است) از طریق به توان دو رساندن داریم:

$$B=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$B^{۲}=(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}})^{۲}=(۳-\sqrt{۵})+(۳+\sqrt{۵})-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$
$$=۶-۲(۲)=۲\Rightarrow B=\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{B<۰}B=-\sqrt{۲}$$

پس حاصل کسر A برابر است با:

$$A=\frac{\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}}=-۱$$

در پایان داریم:

$$\frac{-A}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳=\frac{-(-۱)}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳=\frac{۱}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳\xrightarrow[\text{در مزدوج مخرج}]{\text{ضرب صورت کسر}}$$
$$=\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}-۳=(۳+۲\sqrt{۲})-۳=۲\sqrt{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶ گزینه ۳ درست است.

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{۲x+۱}{x^{۲}+x}=\frac{۱}{۲}$$
$$x^{۲}+x=۴x+۲\rightarrow x^{۲}-۳x-۲=۰$$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند چون مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند. مجموع جواب‌های معادله $s=-\frac{b}{a}=۳$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۷ **گزینه ۳ درست است.**

مقدار x را ساده‌تر می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۳]{۴}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}-۱}{\sqrt[۳]{۴}-۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-۱}{۴-۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}-۱}{۳}$$

عبارت خواسته‌شده را نیز به‌صورت مکعب کامل ساده می‌کنیم.

$$x^{۳}+x^{۲}+\frac{x}{۳}+۱=(x+\frac{۱}{۳})^{۳}+\frac{۲۶}{۲۷}=(\frac{\sqrt[۳]{۴}-۱}{۳}+\frac{۱}{۳})^{۳}+\frac{۲۶}{۲۷}=(\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۳})^{۳}+\frac{۲۶}{۲۷}=\frac{۳۰}{۲۷}=\frac{۱۰}{۹}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)